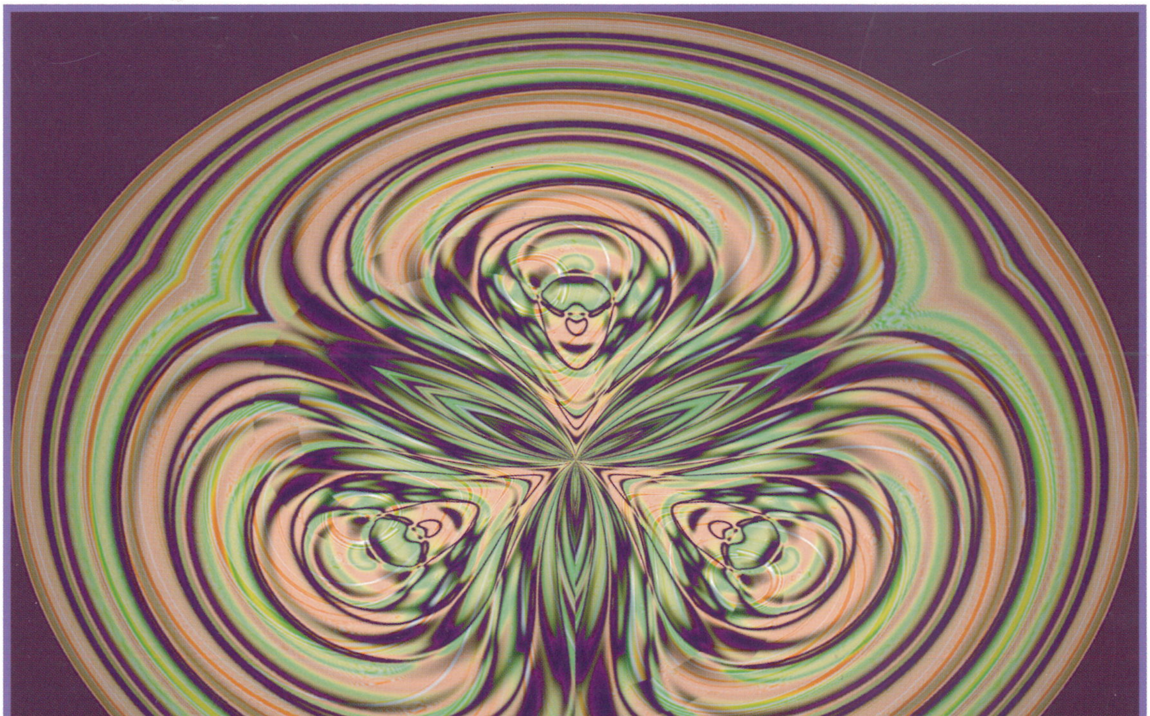
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2008年12月1日発行　第46巻12号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

12
2008

特集 確率論的物理観
数学と物理の共進化

「数学のノーベル賞」と統計物理学　香取　眞理
SLE—Schramm–Loewner Evolution　ローラー・シュラム・ヴェルナー　白井　朋之
三角格子上の臨界パーコレーションの共形不変性　カーディーとスミルノフ　田崎　晴明
群の表現論と極限定理　オルシャンスキーとオクニコフ　洞　彰人
ダイマー模型と幾何学　ケニオンとオクニコフ　高崎　金久
交代符号行列の数え上げ問題　ザイルバーガーとストロガノフ　岡田　聡一
大偏差原理と数理物理学　ヴァラダン　千代延大造
確率論と流体力学極限　ヴァラダン　内山　耕平
確率論的場の量子論　シュポーン　廣島　文生
[コラム]ランダム系のスペクトル　南　就将
《物理の道しるべ》第6回　古澤　明
《数学の道しるべ》第5回　森下　昌紀
《連載》視覚の科学と数学　その5　新井　仁之



No.546

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 546 December 2008

確率論的物理観

数学と物理の共進化

《特　集》

「数学のノーベル賞」と統計物理学　5　香取　眞理

SLE—Schramm–Loewner Evolution
ローラー・シュラム・ヴェルナー　7　白井　朋之

三角格子上の臨界パーコレーションの共形不変性
カーディーとスミルノフ　13　田崎　晴明

群の表現論と極限定理　オルシャンスキーとオクニコフ　20　洞　彰人

ダイマー模型と幾何学　ケニオンとオクニコフ　26　高崎　金久

交代符号行列の数え上げ問題
ザイルバーガーとストロガノフ　33　岡田　聡一

大偏差原理と数理物理学　ヴァラダン　40　千代延大造

確率論と流体力学極限　ヴァラダン　47　内山　耕平

確率論的場の量子論　シュポーン　54　廣島　文生

［コラム］ランダム系のスペクトル　62　南　就将

名著に親しむ　特集から広がる読書案内
複雑ネットワーク上の無限粒子系へ　64　今野　紀雄

《書　評》

山本・金共著　熱方程式で学ぶ逆問題
Fourier 解析，関数解析から数値解析まで　66　滝口　孝志

《リレー連載》

物理の道しるべ　研究者の道とは何か⑥
好きなことをしていたら　67　古澤　明

数学の道しるべ　研究者の道とは何か⑤
あきらめないで　72　森下　昌紀

《連　載》

視覚の科学と数学⑤
視覚の数理モデルのためのウェーブレット・フレーム　78　新井　仁之

数理科学（11月号）前号案内／84
数理科学（1月号）次号予告／84
数理科学バックナンバー一覧／ 4

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，1 年間（本誌＋別冊 2 冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊 1 冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2006 年/2 省略
2006 年/3 〈強い力〉
/4 「空間」とは何か
別冊　量子の新世紀
/5 数学と物理の対話
/6 発見とひらめき
/7 重力は語る
/8 ネットワーク科学の数理
/9 ランダムネス
/10 ツイスター理論の拡がり
別冊　場の量子論の拡がり
/11 固有値問題のひろがり
/12 素粒子像の探究
2007 年/1 ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2 ランダム行列の広がり
/3 現代物理における超対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊　双対性の世界
/5 数学の直観的理解
/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊　素粒子物理学の発展
/11 〈電弱統一理論〉
/12 「時空」への問いかけ
2008 年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊　多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊　対称性と保存則
/11 物理と論理

数理科学臨時別冊一覧

07 年/11 コンピュータ将棋の頭脳
07 年/12 計算神経科学への招待
08 年/1 演習 くり込み群
08 年/3 熱方程式で学ぶ逆問題
08 年/5 重力理論講義
08 年/6 代数幾何入門講義
08 年/7 ネットワーク科学への招待
08 年/9 物理のためのリー群とリー代数
08 年/11 量子暗号理論の展開

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

December 2008 MATHEMATICAL SCIENCES Number 546

特集／確率論的物理観

「数学のノーベル賞」と統計物理学

香取 眞理

ヴェルナー（2006年フィールズ賞），ヴァラダン（2007年アーベル賞），伊藤清（2006年ガウス賞）と「数学のノーベル賞」に確率論研究者が名前を連ねた．**オクニコフ（2006年フィールズ賞）**の受賞理由には「確率論と表現論と代数幾何の橋渡し」とある．

伊藤の確率解析はアインシュタインのブラウン運動の理論を解析学として確立したものである．ヴァラダンの大偏差原理はボルツマンとギブスが導入した統計力学の基礎付けを可能とする数学的原理であり[1]，また流体力学極限の研究は（アインシュタインのブラウン運動の理論の非平衡統計力学における集大成である）グリーン・久保の線形応答理論の数理である[2,3]．

相転移・臨界現象およびフラクタルの研究は，現代統計物理学[4~7]の主要課題の一つである．特に2次元（空間2次元，時空(1+1)次元，あるいは「量子化」は1次元分になるので1次元量子系[4]）の統計力学模型を用いた研究は，可積分系の研究[8]や共形場理論[9,10]と共鳴して大きく発展した．確率解析と等角写像論の融合という2000年のシュラムの論文に端を発するローラー，シュラム，ヴェルナーらの仕事は，この大きな流れが1つの複素確率微分方程式（SLE）の研究に集約される可能性を示唆する[11]．群の表現空間[12]での確率過程を議論するオクニコフらの理論は，自由フェルミオン模型やランダム行列模型[13]といった「すべての物理量が計算できる」よい例として物理学で標準的模型として扱われてきた系と関連する．表現を視覚化するマヤ図形やヤング図形は粉体流や交通流や結晶成長といった非平衡統計力学模型の微視的状態そのものとなる．計算ができて，見た目も役立つ．その背景には深い数学があるというのである．

本特集では，上にあげた数学者およびそれ以外の数名をキー・パーソンとして取り上げ，彼らの仕事を国内の専門家に解説していただいた．読者には，**数学と物理の共進化**を追体験してもらいたい．

このように由緒正しく，かつ発展著しい分野を，どうやって勉強し始めればよいのであろうか．もちろんまずは基礎となる文献をしっかりと読むことが大切である．すでに挙げたように，日本語の良い教科書が続々と出版されている．しかしこれは，言うは易し行うは難しである．そもそもなぜ基礎が大切なのであろうか．基礎を身につけることによって人は，新しい問題や分野に対しても「親しみ」を持てるようになるからだと思う．新奇に思えた課題も，自分が慣れ親しんだ基礎とそれとの関係を正しく見通せたとき，ある種の懐かしさをもって，自分自身の問題にできるのではないだろうか．

この「親しみ」を感じてもらうために，本特集を

企画してみた．例えば，白井氏，洞氏，千代延氏の解説は，いずれもランダムウォーク（パスカルの三角形，あるいは二項分布）から話を始めている．コインの表が出たら右に一歩，裏が出たら左に一歩という酔歩の話は，多くの読者にとって「懐かしい話」であるに違いない．このコイン投げは，1回1回は単純な二者択一の操作に過ぎないが，その回数を重ねていくと相異なる様々な経路（パス）が生じてくる．その各々を時間的にも空間的にも広がりを持つパターンとして見る．そして我々は，生成されるパターン全体の確率測度空間を考えることにするのである．コインの表裏は，田崎氏の話では格子盤上の碁石の白黒であり，高崎氏の議論するタイル張り問題では個々のタイルの配位であり，岡田氏の話に出てくる6頂点模型の矢印の向きである．それらが織りなすパターンの数え上げ問題から統計力学，熱力学と話が発展していく．本特集のタイトル**「確率論的物理観」**は，そんな思考パターンを表現したつもりである．

しかし大切なことは，上述の思考パターンは一つの例に過ぎないということである．調和関数とか，ラプラス・フーリエ変換とか，漸近解析とか，あるいは量子力学に対する「親しみ」からスタートしてここで扱った内容の勉強や研究を進める方もいるかもしれない．我々の思考パターン全体というのは，ものすごく広い空間なのであろう．したがって本特集の読み方にもいろいろなパターンがあって然るべきである．友人と本特集の読後感想を語り合ってみてはどうか．それも，分野や志向の違う友人とである．新たな共進化が起こるかもしれない．

本特集のタイトルをなぜ素直に**統計物理学**としなかったのか．理由の一つには，ここで取り上げたキー・パーソンたちの大部分が statistical physicist ではなく probabilist であることが挙げられる．別の理由もある．通常，統計物理学は，熱・エントロピー・温度といった熱力学的な概念を確率論の手法を用いて説明する理論を指す．そのため，統計物理学とすると，熱力学あるいはそれに相当する巨視的状態に対する物理学がすでに確立されているという感じがする．また確率論は微視的状態から巨視的状態を導く操作を数学的にサポートするものであり，これもまたすでに完成されたものがあり，それを単に応用するという感じがする．ところが本特集で扱った研究においては，どのようなパターンのどんな量を調べ，それのどのような極限を議論すべきかという物理と，そのためにどのような原理の構築が必要かという数学とが同時に発展しているように思えたのである．

臨界現象を研究する上で重要な概念に**ユニバーサリティ・クラス**というものがある．特定の模型を数理的に研究することにより，その模型と同じクラスに属するすべての物理系の本質を知ることができる．したがって，あるルールの下に選ばれた模型の系列を調べ上げればすべての臨界現象が理解できるという考え方である．私は決して，実験や計算機物理を軽視するつもりはない．しかし，確率論的物理観というものはそれらに頼ることのないものであり，その点において統計物理学とは異なる存在であると考える．それが内容豊富なものであるのか，将来性はあるのか．読者が本特集の記事を厳しく査読し，友人たちと大いに議論されることを望む．

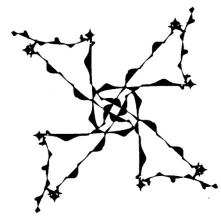
参考文献

1) 黒田耕嗣・樋口保成：『統計力学』，培風館 (2006).
2) 舟木直久・内山耕平：『ミクロからマクロへ 1, 2』，シュプリンガー・フェアラーク東京 (2002).
3) 香取眞理：『非平衡統計力学』，裳華房 (1999).
4) 鈴木増雄：『統計力学』，岩波書店 (1994).
5) 西森秀稔：『相転移・臨界現象の統計物理学』，培風館 (2005).
6) 松下貢：『フラクタルの物理，I, II』，裳華房 (2004).
7) 田崎晴明：『統計力学，上，下』，培風館，近刊.
8) 高崎金久：『可積分系の世界』，共立出版 (2001).
9) 川上則雄・梁成吉：『共形場理論と1次元量子系』，岩波書店 (1997).
10) 山田泰彦：『共形場理論入門』，培風館 (2006).
11) 香取眞理：日本物理学会誌 **62**, 527–531 (2007).
12) 岡田聡一：『古典群の表現論と組合せ論，上，下』，培風館 (2006).
13) 永尾太郎：『ランダム行列の基礎』，東京大学出版会 (2005).

（かとり・まこと，中央大学理工学部）

SLE — Schramm–Loewner Evolution

ローラー・シュラム・ヴェルナー



白井　朋之

1. はじめに

有名な確率論研究者カッツは 66 歳のときのある講演を「君くらいの歳になったら自分自身の研究ではなく人の仕事について講演したほうがよいとゲルファントにアドバイスされた」と始めたそうです[*1)]．そうしてこれ以上の話題はないとしてカッツが取り上げたのがこの特集号でもテーマの一つとなっているドンスカー・ヴァラダンの大偏差の理論でした．ヴァラダンは 2007 年にその理論によって**アーベル賞**を受賞しています．そのヴァラダンがあるインタビューの中でこのカッツの話を引き合いに出されて，もしあなたがゲルファントのアドバイスに従うならば誰の研究を話題として取り上げるかと尋ねられたとき，ここ 10 年の確率論で最もエキサイティングな分野として挙げたのが，本稿のテーマである SLE です．

シュラムが 1999 年のプレプリント（出版は 2000 年[5)]）で，ループ除去ランダムウォークの連続極限の候補として Stochastic Loewner Evolution を導入したのが SLE の始まりで，その後，特にローラー，シュラム，ヴェルナーらによって詳しく研究され，多くの未解決の予想が解決されました．このテーマを発展させた功績により，2006 年の国際数学者会議（ICM）においてヴェルナーが**フィールズ賞**を受賞したのはご存知のとおりです．ヴェルナーは SLE を発明したシュラムの名を冠して，**Schramm–Loewner Evolution** と呼びたいと彼の講義録に書いています．

SLE は確率論・複素関数論・統計力学・共形場理論などの異分野が予想外にしかし自然な形で融合して現れたシンプルかつ美しい対象です．本稿では，特に確率論と複素関数論が SLE を通じてどのようにクロスオーバーしているかに重点をおいて解説したいと思います．

*1)　ゲルファントは 1913 年 9 月 2 日生．カッツは 1914 年 8 月 3 日生．

2. パス空間の上の確率測度

SLE とは一言で言ってしまえば，複素平面 $\mathbb{C}$ 内のあるよい性質をもつランダムな連続曲線のことです．ランダムな連続曲線は，典型的な例のブラウン運動と同様に，連続曲線全体のなす集合（以後，**パス空間**と言います）の上の確率測度[*2)]と捉えると便利ですので，まずそのことについて説明します．

最も基本的なモデルであるランダムウォーク（以後単に RW と言います）から始めましょう．公平なコインを独立に続けて N 回投げる試行を考えます．i 回目の試行で表が出れば $\xi_i = +1$，裏ならば $\xi_i = -1$ として確率変数列 $S_0, S_1, \cdots$ を

$$S_k = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k, \quad S_0 = 0$$

と定義したとき，$\{S_k, k = 0, 1, 2, \cdots, N\}$ を 0 出発の 1 次元 RW と言います．図 1 は 100 回コ

*2)　以降，確率測度は単に確率と読み直して構いません．

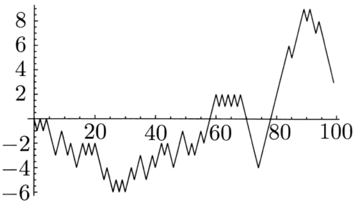


図1　1次元ランダムウォーク（$N=100$）.

インを振って得られる $\{S_i, i=0,1,\cdots,100\}$ の一つの実現に対して $\{(i,S_i), i=0,1,2,\cdots,100\}$ を図示したものです．図1のような連続曲線のことをパスと呼ぶことにします．公平なコインを N 回投げたときの「表」と「裏」の並びの全パターンは 2^N 通りでそれぞれ等確率 $1/2^N$ で現れますので，1次元 RW とは対応する 2^N 通りのパスの中から等確率 $1/2^N$ でランダムにパスを一つ選ぶモデルとも言えるわけです．このように RW が，コイントスによって時々刻々と変化するという視点と，パス空間の上の確率測度（ステップ N の可能なパス全体上の一様確率）に従ってパスをランダムに選ぶことにより実現されるとする視点はともに重要です．喩えがよいかどうかわかりませんが，大事な決断をするとき毎回コインを投げて右に進むか左に進むかを決めて人生を歩んでいるというのが前者の考え方で，あらかじめ人生のシナリオが何種類も用意されていて神様がそれらの中からある一つのシナリオをランダムに選んでそれに沿ってただ人生を歩んでいるだけなのだという見方が後者だと言ってもいいかもしれません．ランダムウォークについてはこの2つの見方が同値なのですが，一般には後者のほうが少し広い考え方になります．

3. 2次元離散モデルと連続モデル

SLE は2次元の確率モデルの臨界現象に関する様々な未解決予想・問題に解答を与えました．本節では SLE に関係する2次元の離散モデルの具体例を挙げて，その連続極限について考えてみます．

3.1 2次元 RW と2次元ブラウン運動

時刻 $t=0$ で複素平面 $\mathbb{C}$ の点 z にある質点がまず東西南北の4方向から等確率 1/4 で一つ方向を選んでその方向に時速1で等速直線運動をします．1単位時間経過後にまた東西南北を等確率 1/4 で選んでその方向に等速直線運動します．これを $t=0$ から N まで繰り返して得られる区分的な折れ線パスを $\{S_t, 0 \le t \le N\}$ と表します．このパスのパターンは 4^N 通りありますので，前節と同様の考え方をすると，これらのパスを等確率 $1/4^N$ で選ぶモデルが2次元 RW と言えます．つまり，2次元 RW とは始点 z の連続曲線のなすパス空間 Ω_z の上にある確率測度が与えられたモデルなわけです．

さて，この RW は幅1の格子の上を動いているとも言えるわけですが，格子の幅を小さくしていく，または同じことですが RW を観察するカメラの位置を遠ざけていくとどうなるでしょうか？ もちろん，N を固定していると RW のパスは点 z に収束していくように見えます．しかし，格子を小さくしながらそれに合わせて観察する時間を適当に長くすると（ランダムな）連続曲線が見えてきます（図2参照）．もう少し正確には，$\{X_t^{(N)} = z + \frac{S_{Nt}-z}{\sqrt{N}}, 0 \le t \le 1\}$ とおくと，$X_t^{(N)}$ は格子幅 $1/\sqrt{N}$ の2次元 RW で，対応するパス空間 Ω_z 上の確率測度を $\mu^{(N)}(z)$ とすると，$N \to \infty$ で $\mu^{(N)}(z)$ はある確率測度 $\mu_W(z)$ に収束することが知られています*3)．この $\mu_W(z)$ はパス空間 Ω_z 上の**ウィーナー測度**と呼ばれて，対応するランダムな連続曲線はいわゆる2次元ブラウン運動です．この意味で2次元 RW の連続極限は2次元ブラウン運動です．

3.2 ループ除去ランダムウォーク

ループ除去ランダムウォークはシュラムが SLE を導入するきっかけとなった2次元の確率モデルです．2次元 RW は自分自身が以前に通った場所に戻ってくる可能性があるのでループがあるわけですが，そのループをあるルールに従って除去して得られる自己交差のない RW のことを**ループ除去**

*3)　ここで言う収束とは Ω_z 上の確率測度としての弱収束のことで，**ドンスカーの不変原理**と言います．例えば文献 4) などを参照して下さい．

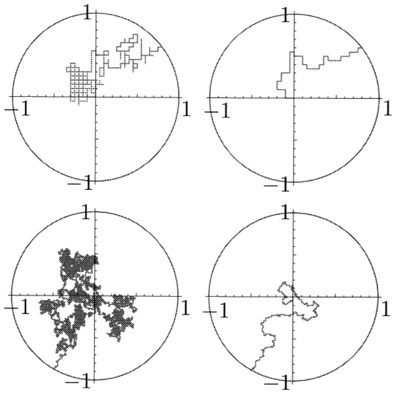


図 2　D が単位円の場合の RW と LERW: $N = 20$（上）と $N = 100$（下）.

ランダムウォーク (Loop–Erased Random Walk, LERW) と言います．ループ除去の正確な定義は省略して，図 2 で雰囲気を理解していただくことにします．領域 $D \subset \mathbb{C}$ 内の点 z から出発して初めて境界 ∂D の点 w へ到着するまでのステップ幅が $1/N$ の RW パス（図 2 左）からループを除去した LERW パス（図 2 右）を考え，各 LERW パスに $4^{-n(p)}$ に比例する確率を与えます．ただし，$n(p)$ はループを除去する前の RW パス p のステップ数です．さらに，向きを反転して LERW を始点 w，終点 z のパスと見なして，境界の点 w を始点，内部の点 z を終点とする D 内の**単純曲線**[*4] のなすパス空間 $\Omega_{w,z}(D)$ 上に定義される確率測度を $\mu_D^{(N)}(w,z)$ と表すことにします．シュラムは $\mu_D^{(N)}(w,z)$ が $N \to \infty$ である $\mu_D(w,z)$ に収束してそれが 7 節で述べる SLE_2 で記述できることを予想して，後にそれを証明したのです．

4. 等角写像とリーマンの写像定理

がらりと話をかえましょう．複素関数論は理学部や工学部の 2 年生から 3 年生で習う基礎的科目の一つですが，半期の講義では留数定理までが目標になることが多く，SLE で重要な役割を果たすいわゆる等角写像論について講義の中で習うことは少ないのではないかと思います．等角写像とは

*4)　単純曲線とは自己交差のない連続曲線のことを言います．

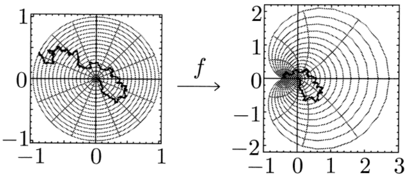


図 3　等角写像 $f(z) = ze^z$ による単位円 $\mathbb{U}$ と曲線の像.

各点において角度を保存する同相写像のことですが，複素平面 $\mathbb{C}$ における等角写像は正則関数が定める写像であることが知られていますので，2 次元では等角写像論とはすなわち正則関数の写像としての性質を調べることとも言えます．以下，領域 $D, \Delta \subset \mathbb{C}$ に対して，全単射正則関数 $f : D \to \Delta$ のことを等角写像と言い，f は D を Δ に等角に写すと言います．

等角写像論の中で最も重要な定理の一つはリーマンの写像定理で，複素平面 $\mathbb{C}$ 内の（$\mathbb{C}$ 自身でない）任意の**単連結領域** D に対して[*5]，ある正則関数が存在して単位円の内部 $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ を D へ等角に写像できるというものです．例えば，単連結領域 $D = \mathbb{C} \backslash (-\infty, -\frac{1}{4}]$ に対する等角写像は**ケーベ関数** $k(z) = z(1-z)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ で与えられて，k は単位円 $\mathbb{U}$ を D へ等角に写します．ちなみに $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]$ のように，$\mathbb{C}$ 内の点と無限遠を結ぶ単純曲線 Γ を $\mathbb{C}$ から除いた領域 $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ を**截線領域**と言い，それを与える等角写像を截線写像と言います．

図 2 右下図を $\mathbb{U}$ から境界を始点とする単純曲線 Γ を除いた単連結領域 $\mathbb{U} \setminus \Gamma$ と見なせば，リーマンの写像定理によりある等角写像 f による単位円の像ですから，$\mathbb{U} \setminus \Gamma = f(\mathbb{U})$ という関係により，$\mathbb{U}$ 内の単純曲線はいつでもある等角写像と対応させることができます．この事実が SLE ではキーになります．

5. ビーベルバッハ予想とレブナー方程式

SLE は確率論的 (Stochastic) な**レブナー方程式**

*5)　D 内の任意の単純閉曲線の内部が D の点のみからなるとき，D は単連結であると言います．つまり，内部に穴のない領域のことです．

(LE) として導入されました．本節ではレブナー方程式の出自であるビーベルバッハ予想について述べます．

定理　べき級数

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \qquad (1)$$

が単位円 $\mathbb{U}$ 内で正則かつ**単葉**[*6]ならば $|a_n|\le n\ (n=2,3,\cdots)$ をみたす．

ちょうど，先のケーベ関数の係数がすべての等号をみたす例となっています．この予想は，1916 年にビーベルバッハ自身が $n=2$ の場合を証明し，1923 年にレブナー（K. Löwner, C. Loewner）[*7]が $n=3$ の場合に証明しました．以降 $n=6$ まで次々と示され，最終的にドゥブランジュが 1984 年に肯定的に予想を解決しました．

$\mathbb{U}$ で定義された単葉な正則関数 f で，$f(0)=0$ かつ $f'(0)=1$ をみたすもの，つまり定理の (1) の形のテイラー展開をもつものの全体を $\mathcal{S}$ とします．$f\in\mathcal{S}$ に対して (1) で定まる係数 $a_n=a_n(f)$ は f に関して連続となります[*8]．f の n 次の係数を与える写像 $a_n:\mathcal{S}\to\mathbb{C}$ の連続性と 4 節で述べたような截線写像の全体が $\mathcal{S}$ の中で稠密にある事実を利用すると，$|a_n(f)|$ の $\mathcal{S}$ における上限を求めるには，ちょうど実数上の連続関数の上限を求めるのに有理数についてだけ調べればよいのと同様に，截線写像 f についてのみ $a_n(f)$ を調べればよいことがわかります．

レブナーは $n=3$ の場合を示すために新しい道具を開発しましたが，それが表題のレブナー（の微分）方程式です．レブナーのアイデアを見てみましょう．截線写像 $f\in\mathcal{S}$ が $\mathbb{U}$ を $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ へ等角に写しているとします．単純曲線 Γ のパラメータ表示 $\gamma:[0,\infty)\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ で $\gamma(0)$ が Γ の端点で，$s\to\infty$ で $\gamma(s)$ が無限遠に至るものとします．γ による $[t,\infty)$ の像 $\gamma[t,\infty)$ を $\Gamma_t(\subset\Gamma)$ とすると，リーマンの写像定理により $\mathbb{U}$ を $\mathbb{C}\setminus\Gamma_t$ に写す截線写像 f_t が存在します．γ の適当なパラメータ表示を選ぶと，$f_t(0)=0$, $f_t'(0)=e^t$ となるようにできるので $e^{-t}f_t\in\mathcal{S}$ となります．さて，図 4 にあるように等角写像 $\phi_t:\mathbb{U}\to\mathbb{U}_t$ を $\phi_t(z)=(f_t^{-1}\circ\iota\circ f)(z)$ によって定義します．写像 ι は $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ から $\mathbb{C}\setminus\Gamma_t$ への恒等写像です．$\gamma[0,t]$ は図 4 の右下の点線部でちょうど Γ と Γ_t の差ですが，f_t^{-1} によってその差に相当する部分は $\mathbb{U}$ 内の点線部に写されます．この点線部分を $\mathbb{U}$ から除いたものが $\mathbb{U}_t$ です．簡単な計算から $e^t\phi_t\in\mathcal{S}$ であることがわかりますので

$$e^t\phi_t(z)=z+a_2(t)z^2+a_3(t)z^3+\cdots \qquad (2)$$

とテイラー展開できます．この $\phi_t(z)$ に対して $|\zeta(t)|=1$ をみたす連続関数 $\zeta:[0,\infty)\to\partial\mathbb{U}$ が一意的に存在して，いわゆるレブナー方程式

$$\frac{\partial\phi_t(z)}{\partial t}=-\phi_t(z)\frac{\zeta(t)+\phi_t(z)}{\zeta(t)-\phi_t(z)}, \qquad \phi_0(z)=z \qquad (3)$$

をみたし，さらに $\lim_{t\to\infty}e^t\phi_t(z)=f(z)$ となることをレブナーは示しました．これは $\lim_{t\to\infty}a_n(t)=a_n$ を意味します．

ここで説明した方法は，与えられた $f\in\mathcal{S}$ に対して，恒等写像 $id\ (t=0)$ と $f\ (t=\infty)$ をつなぐ $\{e^t\phi_t, 0\le t<\infty\}$ という等角写像の空間 $\mathcal{S}$ の中での**フロー（半群）**を構成して，そのフローを用いて f に関する性質を解析するというものです．このフローのアイディアはレブナーの多様な

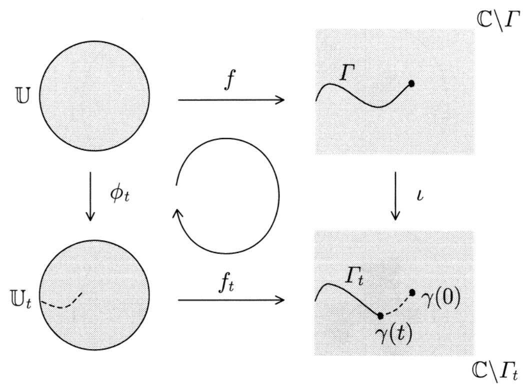


図 4　等角写像 ϕ_t.

---

*6）領域 D 内の異なる 2 点 z,w の関数 f による像 $f(z)\ne f(w)$ が異なるとき，f は D で単葉であると言います．

*7）K. Löwner はチェコ生まれのユダヤ人．Karel Löwner が本名で，ドイツ流には Karl Löwner．その後，ナチスの迫害を逃れてアメリカに渡ってからは Charles Loewner を使いました．

*8）$\mathcal{S}$ には広義一様収束の位相を入れて考えます．

研究の根底を一貫して流れています．

さて，(2) の両辺を (3) に注意して t で微分して比較すると，係数 $\{a_n(t)\}$ に関する微分方程式が得られます．例えば，$n = 2, 3$ のときは

$$\dot{a_2}(t) = -2e^{-t}\overline{\zeta(t)},$$

$$\dot{a_3}(t) = -2e^{-2t}\overline{\zeta(t)^2} - 4e^{-t}\overline{\zeta(t)}a_2(t)$$

となります．これを解くことにより f の 2 次の係数 a_2 は

$$a_2 = \lim_{t\to\infty} a_2(t) = -2\int_0^\infty e^{-s}\overline{\zeta(s)}ds$$

として得られ，$|\zeta(t)| = 1$ に注意すれば

$$|a_2| \le 2\int_0^\infty e^{-s}ds = 2$$

となります．任意の截線写像についてこの不等式が得られましたので，先ほどの連続性と稠密性の注意から $n = 2$ の場合を示したことになります．$n = 3$ の場合は少しだけ複雑ですが，ほぼ同様ですので読者にお任せします．

6. 共形不変性と領域マルコフ性

6.1 共形不変性

任意の単連結領域 D, 始点 $w \in \partial D$, 終点 $z \in D$ に対するパス空間上 $\Omega_{w,z}(D)$ に 3.2 節の LERW の例のような確率測度の族 $\{\mu_D(w,z)\}$ が与えられたとします．$\mu_D(w,z)$ に従うランダムな連続曲線を図 3 のように等角写像 $f: D \to \Delta$ で写すと，$w' = f(w) \in \partial\Delta$ を始点，$z' = f(z) \in \Delta$ を終点とする Δ 内のランダムな連続曲線，つまり，パス空間 $\Omega_{w',z'}(\Delta)$ 上の確率測度が定まりますので，これを $f_*\mu_D(w',z')$ と表します．一方，この等角写像 f とは全く無関係に $\mu_\Delta(w',z')$ というパス空間 $\Omega_{w',z'}(\Delta)$ 上の確率測度が与えられています．これら 2 つの $\Omega_{w',z'}(\Delta)$ 上の確率測度 $f_*\mu_D(w',z')$ と $\mu_\Delta(w',z')$ が一致する理由は本来全くありませんが，2 次元確率モデルの**共形不変性**とはまさにこの 2 つの確率測度が任意の等角写像 f に対して一致することを言うのです．つまり，共形不変性が成り立つ状況では，確率モデルを支配している確率測度の実体は本質的に一つであると言えます．

6.2 領域マルコフ性

領域マルコフ性を述べる前に通常の**マルコフ性**について 2 次元ブラウン運動を例に思い出しておきましょう．3.1 節で見たように 2 次元ブラウン運動には出発点 $z \in \mathbb{C}$ に依存した $\{\mu_W(z)\}$ というパス空間上のウィーナー測度の族が対応していました．点 z を出発したブラウン運動が連続曲線 $\{l(s), 0 \le s \le t\}$ に沿って動いたという条件の下での時刻 t 以後の運動を定める条件付き確率測度が $\mu_W(l(t))$ に一致するという性質をマルコフ性と言います．つまり，過去にどのような動き方をしても現在（時刻 t）の位置の情報のみで未来の確率法則が定まるというのがマルコフ性です．

LERW のような自己交差のない 2 次元モデルから定まる $\Omega_{w,z}(D)$ 上の確率測度の族 $\{\mu_D(w,z)\}$ を考えます．$\mu_D(w,z)$ に従うランダムな連続曲線の時刻 t までの軌跡が $L_t = \{l(s), 0 \le s \le t\}$ であるという条件の下での条件付き確率測度は（自己交差がないので）$\Omega_{l(t),z}(D \setminus L_t)$ 上のある確率測度になります．これが $\mu_{D\setminus L_t}(l(t), z)$ によって与えられるという性質が**領域マルコフ性**です．$\mu_{D\setminus L_t}(l(t), z)$ が $l(t)$ のみならず，$D \setminus L_t$ という形で過去の軌跡 L_t に依存しているので上の意味のマルコフ性はもちませんが，もし 6.1 節で述べたような共形不変性があれば領域 D にはよらず本質的に一つの確率測度があると思えますから，ある意味でマルコフ性に近い概念と言えます．

7. Schramm–Loewner Evolution

前節で述べた共形不変性と領域マルコフ性は相当強い制限であって，これら 2 条件を同時にみたす確率測度の族 $\{\mu_D(z,w)\}$ が存在すれば，それは極めて重要なものであることが予想されます．実際，そのような確率測度の族には本質的に 1-パラメータ $\kappa > 0$ の自由度しかなく，これこそがまさに SLE（SLE_κ）なのです．

図 2 の LERW のような $\mathbb{U}$ の境界から原点に至る $\mathbb{U}$ 内の単純曲線を $\Gamma = \{\gamma(s), 0 \le s < \infty\}$ として，$\Gamma_t = \gamma[0,t]$ とおきます．$\mathbb{C} \setminus \Gamma$ と $\mathbb{C} \setminus \Gamma_t$

のかわりに $\mathbb{U}\setminus\Gamma$ と $\mathbb{U}\setminus\Gamma_t$ に対して5節と同様の議論をして得られる $\phi_t(z)$ は $\mathbb{U}$ の境界 $\partial\mathbb{U}$ 上のある連続曲線 $\zeta(s)$ が存在してレブナー方程式 (3) をみたします．また (3) を解くことにより $\phi_t(z)$ が得られて，$\gamma(t)=\phi_t(\zeta(t))$ という関係により γ を ζ から復元できます．この意味で，$\mathbb{U}$ 内の単純曲線 γ は $\partial\mathbb{U}$ 上の連続曲線 ζ に翻訳することができます．シュラムは，図2に現れるような「ランダムな」単純曲線 γ をこの方法で「ランダムな」連続曲線 ζ に翻訳したときに，モデルが共形不変性と領域マルコフ性をもつという仮定の下で，ζ が $\partial\mathbb{U}$ 上のブラウン運動 $\zeta(t)=e^{i\sqrt{\kappa}B_t}$ $(\kappa>0)$ にならざるを得ないことを示したのです．(B_t は1次元ブラウン運動.) まとめると，確率論的なレブナー方程式とは

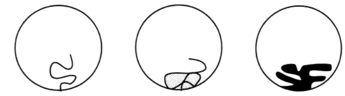
$$\dot{\phi}_t(z) = -\phi_t(z)\frac{e^{i\sqrt{\kappa}B_t}+\phi_t(z)}{e^{i\sqrt{\kappa}B_t}-\phi_t(z)}, \qquad (4)$$

$$\phi_0(z) = z \qquad (5)$$

のことで，これを解いて $\gamma(t)=\phi_t(e^{i\sqrt{\kappa}B_t})$ として得られる $\mathbb{U}$ 内のランダム曲線 γ こそが SLE_κ なのです*9)．こうして得られる連続曲線は κ の値によってはもはや単純曲線とは限りません (図5)．

シュラムらによってLERWの連続極限は SLE_2 に収束することが証明され，**調和探索過程**，**パーコレーション探索過程**やランダムな**ペアノ曲線**の連続極限がそれぞれ SLE_4, SLE_6, SLE_8 に収束するなど，他にも様々なモデルがSLEで記述できることがわかっています．また，**自己回避ウォーク**の連続極限は $SLE_{8/3}$ となることが予想されています．方程式の単純さから考えると非常に意外ですが，κ の値によって SLE_κ が定めるランダム曲線の様子は劇的に変化します．$0<\kappa\le 4$ では単純曲線で，$4<\kappa<8$ では自分自身や境界に接することがあり，$\kappa\ge 8$ では $\mathbb{U}$ を埋めつくしてしまいます．この事実が上で述べた様々なモデルの連続極限を統一的に記述可能な所以です．

これまで漠然としたまま使われていた確率モデルの共形不変性の概念をきちんと定式化して，共形不変な2次元確率モデルを極めて単純な方程式によって幾何学的な描像を明らかにしながら見事に表現したのがSLEであり，確率解析の道具を用いて様々な計算が厳密に実行可能となり，共形場理論などを用いて得られていた多くの予想が解決されたのです．



$0<\kappa\le 4$ $4<\kappa<8$ $\kappa\ge 8$

図5 SLE_κ.

8. おわりに

SLEの性質や共形場理論との関係，SLEを用いてどのような予想が解決されたかについてはほとんど述べることができませんでしたが，本稿でSLEに少しでも興味をもたれた方は，優れた解説（例えば文献 1～3, 6）など）が数多くありますので，是非そちらを参照してみて下さい．

付記：本稿の校正刷りを受け取る前日，シュラム氏が登山中の事故で46歳の若さで亡くなったという報せを受け愕然としました．SLEのような画期的な仕事が今後も期待されただけに非常に残念でなりません．

*9) SLEにはそのモデルの違いによって，Chordal, Radial, Whole-planeの3種類あります．ここで述べたのはRadial SLEと呼ばれるものです．

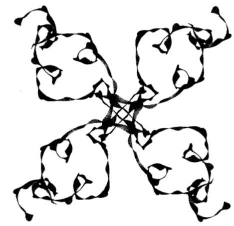
参考文献

1) W. Kager and B. Nienhuis, A guide to stochastic Löwner evolution and its applications, *J. Stat. Phys.* **115** (2004), 1149–1229.
2) 香取眞理，臨界現象・フラクタル研究の新世紀—SLEの発見—，日本物理学会誌 **62** (2007), 527–531.
3) G.F. Lawler, Conformally Invariant Processes in the Plane, *AMS Mathematical Surveys and Monographs* **114**, 2005.
4) 松本裕行，SGCライブラリ『応用のための確率論・確率過程』，サイエンス社，2004年.
5) O. Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118** (2000), 221–288.
6) W. Werner, Random planar curves and Schramm–Loewner evolutions, http://front.math.ucdavis.edu/0303.5354 から入手可能.

（しらい・ともゆき，九州大学大学院数理学研究院）

三角格子上の臨界パーコレーションの共形不変性

カーディーとスミルノフ



田崎　晴明

「三角格子の目にデタラメに白黒の碁石を並べる」というゲームのような設定で，臨界点での連結確率が共形不変性を示す—2001 年にスミルノフが証明したこの驚くべき結果を，予備知識を仮定せず丁寧に解説する．数理物理学の近年の話題の一つだが，じっくり読めば初学者でも問題設定と主要結果は完全に理解できるはずだし，証明の概略も垣間見ることができるだろう．

ただし，これを読むには「正則関数」という概念を知っている必要がある．大学一年生や高校生には馴染みがないだろうから，必要最低限の定義を書いておこう*1)．複素関数（複素数を別の複素数に写す関数）$f(z)$ の微分を定義したい．$|\eta|=1$ を満たす任意の複素数 η をとり，正の実数 ε を使って，

$$f'_\eta(z)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{f(z+\varepsilon\eta)-f(z)}{\varepsilon\eta} \qquad (1)$$

とすれば，z を η 方向にずらした際の微分になっている．一般には $f'_\eta(z)$ は η に依存するが，特に $f(z)$ の性質がよく，$f'_\eta(z)$ が η によらないとき，$f(z)$ は z で微分可能という．開集合 $\Omega\subset\mathbb{C}$ の全ての点で微分可能な関数 $f(z)$ を，Ω 上の正則関数（あるいは共形変換）と呼ぶ．正則関数は様々な美しい性質をもっており，それを調べるのが複素関数論である．

*1)　複素関数論をじっくりと学べば，ここで解説する結果の深さをさらに実感できるだろう．

1. ボードゲーム「ヘックス」とパーコレーション

一辺の長さが 1 のひし形 ABCD を，一辺が δ の正三角形で分割し，三角格子とみなす（図 1 では $\delta=1/6$ とした）．線が交わる点を格子点と呼ぶ．

ヘックスというゲームがある．1940 年代に，ニールス・ボーア研究所にいた数学者ピート・ハインと，“A Beautiful Mind” のモデルとしても有名なジョン・ナッシュが独立に考案したボードゲームだ．二人のプレイヤーは，図 1 の「盤」の格子点に，それぞれ●と○の碁石を交互に一つずつ置いていく．ここで，●のプレイヤーは，●の碁石によって辺 AB と辺 CD を結ぶ連結した道を作ることを目指す*2)．○のプレイヤーは，○の碁石で辺 BC と DA を結ぶことを目指す．

図 2 は二人が全ての碁石を打ち終わって，●が勝った状況である．辺 AB と辺 CD の間には●の道が通じているが，辺 BC と DA の間の○の道はない．実は，このゲームには決して「引き分け」が

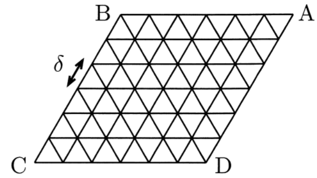


図 1　ひし形を格子間隔 δ の三角格子に分割した「盤」の上でパーコレーションを考える．

*2)　距離 δ だけ離れた格子点を連結しているとみなす．

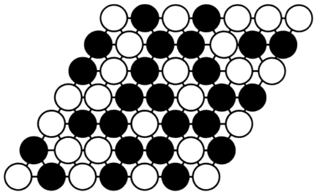


図 2　ヘックスの最終局面，あるいはパーコレーションのパターン．AB と CD を結ぶ●の道ができている．

ないことが，次の「ヘックスの基本定理[*3)]」によって保証されている．

定理：盤の全ての格子点に（必ずしも個数の等しくない）●と○を任意に並べたパターンにおいて，「AB と CD を結ぶ●の道がある」と「BC と DA を結ぶ○の道がある」の内の一方が必ず成立する．

ヘックスのボードを使って，確率論の問題を考えよう．プレイヤーが戦略的に碁石を置くかわりに，サイコロを投げてデタラメに碁石を並べていくのだ．モデルの唯一のパラメターである p（ただし $0 \leqslant p \leqslant 1$）を選んだら，各々の格子点に，互いに独立に，確率 p で●を置き，確率 $1-p$ で○を置いていく．そうやって全ての格子点に碁石を置いたあとで「●が勝つ確率」つまり，「辺 AB（の少なくとも一点）と辺 CD（の少なくとも一点）を結ぶような●の連結した道が存在する確率」を $f_\delta(p)$ と書く．三角格子の格子間隔 δ が小さくなるとき（つまり，格子点の個数が多くなるとき）の確率 $f_\delta(p)$ のふるまいに関心がある．

もし p が十分に小さければ，ほとんどの格子点に○が置かれ，○の「海」の中に少しだけ●の「島」が散らばった状況になるだろう．そうなると，AB と CD を結ぶ●の道が存在するとは考えにくい．特に，δ が小さくなっていけば，AB と CD を結ぶのにたくさんの碁石が必要になり，道を作るのはますます困難になっていくだろう．実際，$p < 1/2$ を満たす任意の p について，$\delta \downarrow 0$ のとき $f_\delta(p) \downarrow 0$ となることが証明されている．格子点の数が増えれば，●は確実に「負ける」のだ．

反対に p が十分に 1 に近ければ，全て逆転し，●の「海」に，○が散らばっていることになる．よほど運が悪くない限り AB と CD を結ぶ●の道が存在するはずだ．実際，$p > 1/2$ を満たす任意の p について，$\delta \downarrow 0$ のとき $f_\delta(p) \uparrow 1$ となることが証明されている．格子点の数が増えれば，●は確実に「勝つ」．

p が 1/2 より大きいか小さいかで $f_\delta(p)$ のふるまいが劇的に変わるのは相転移現象の一例である．そして，二つの「相」を隔てる臨界点の $p = 1/2$ は想像を絶する豊かな性質をもっているのだ．

臨界点では δ によらず $f_\delta(1/2) = 1/2$ となる．この事実は下で導く双対性の等式 $f_\delta(p) + f_\delta(1-p) = 1$ で $p = 1/2$ とすれば直ちに示される．臨界点では勝ち負けの確率はちょうど五分五分なのだ．**「格子間隔が変わって格子点の数が変化しても連結確率が変わらない」というスケール不変性**が見られることに注目しよう．

双対性はヘックスの基本定理の簡単な帰結だ．まず，二つの事象が排他的に生じるから，[●が AB と CD を結ぶ確率]+[○が BC と DA を結ぶ確率]=1 が言える．左辺の一つ目の確率は $f_\delta(p)$ だ．二つ目について考えよう．図 3 左に○が BC と DA を結んだ局面を描いた．この図を右に 60 度回転し，左右反転し，白と黒を反転したのが右図である．先ほどの○の道は，AB と CD を結ぶ●の道に変換されている．ある格子点に●を置く確率は p，○を置く確率は $1-p$ だった．よって，ここでの [○が BC と DA を結ぶ確率] は，確率を $1-p$ に変えたモデルでの [●が AB と CD を結ぶ確率]，つまり，$f_\delta(1-p)$ に等しいことになる．はじめの

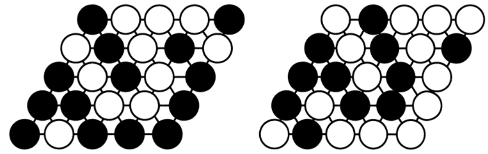


図 3　双対性の要の図．○が勝った局面（左）を回転，左右反転，白黒反転すると，●が勝った局面（右）になる．

*3)　証明も難しくない．絵を描いてみれば納得できるだろう．

等式に戻せば，双対性の等式 $f_\delta(p)+f_\delta(1-p)=1$ が得られる．双対性は，p が小さい領域と p が1に近い領域を正確に対応づける興味深い関係である．

2. 連結確率の共形不変性

臨界点 $p=1/2$ での三角格子上のパーコレーションは，単なるスケール不変性を越えた，驚くべき不変性をもっている．以下，正確に述べよう．

話の舞台である2次元平面を複素平面 $\mathbb{C}$ として表現する．δ を任意の正の実数とし，Λ_δ を格子間隔が δ の無限に大きな三角格子（の格子点の集合）としよう．あえて式で書けば，

$$\Lambda_\delta := \{j\delta + k\tau\delta \mid j,k \in \mathbb{Z}\} \quad (2)$$

である．ここで，

$$\tau := \exp\left[\frac{2\pi}{3}i\right] = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (3)$$

という，実軸と120度の角をなす単位ベクトル（大きさ1の複素数）を定義しておく．面白いことに，スミルノフの理論では，純虚数 i ではなく，この τ が複素数を表現する「単位」の役割を果たす．

$\Omega \subset \mathbb{C}$ を任意の有界で単連結な開集合とし，$\partial\Omega$ をその境界とする．$\partial\Omega$ 上に任意の四点 A, B, C, D を，左回りにこの順番に並ぶように，とる（図4左）．三角格子 Λ_δ から Ω の内側に入っている部分を切り出したものを Ω_δ とする．Ω_δ の境界の格子点で，A, B, C, D に最も近いものを（記号を流用して）それぞれ A, B, C, D と呼ぶ（図4右）．Ω_δ の境界に沿って A から B に向かって左回りに

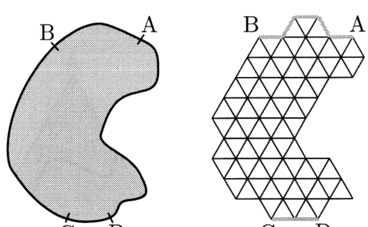


図4　2次元の領域 Ω と境界上の四つの点（左）．対応する三角格子 Ω_δ（右）．

とった弧を $\widehat{\mathrm{AB}}$ と書く*4)．同様に，$\widehat{\mathrm{CD}}$ を C と D を結ぶ弧とする（$\widehat{\mathrm{AB}}$ と $\widehat{\mathrm{CD}}$ を図4右で太い灰色で示した）．

ここでパーコレーションの問題を考える．臨界点に関心があるので，最初から $p=1/2$ としよう．Ω_δ の各々の格子点に，独立に，確率 1/2 で●の碁石，確率 1/2 で○の碁石を置いていく．全ての格子点に碁石を置いたとき，弧 $\widehat{\mathrm{AB}}$ と弧 $\widehat{\mathrm{CD}}$ を結ぶ（連結した）●の道が存在する確率を $f_\delta(\Omega;\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})$ と書く．Ω をひし形に取り，A, B, C, D を頂点とすれば，これは上の $f_\delta(1/2)$ そのものである．

連続極限における連結確率を

$$f(\Omega;\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}) := \lim_{\delta\downarrow 0} f_\delta(\Omega;\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}) \quad (4)$$

によって定義する（極限の存在は証明されている）．図4左の図形はそのままにして，右図での格子の刻み δ をどんどん細かくしていこうというのだ．

以下の定理は連結確率 $f(\Omega;\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})$ が驚くべき不変性を持っていることを示す．

定理1：集合 Ω とその境界上の点 A, B, C, D を上述のようにとる．$\Omega' \subset \mathbb{C}$ を任意の有界で単連結な開集合，$\Phi : \Omega \to \Omega'$ を任意の一対一の正則関数とし，$\mathrm{A}'=\Phi(\mathrm{A})$, $\mathrm{B}'=\Phi(\mathrm{B})$, $\mathrm{C}'=\Phi(\mathrm{C})$, $\mathrm{D}'=\Phi(\mathrm{D})$ と書く．このとき

$$f(\Omega;\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}) = f(\Omega';\mathrm{A}',\mathrm{B}',\mathrm{C}',\mathrm{D}') \quad (5)$$

が成り立つ．

連結確率 $f(\Omega;\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})$ は任意の正則関数（共形変換）について不変なのである．2次元のパーコレーションの臨界点の共形不変性は様々な形で予想されていたが，上の美しい定理を最初に証明したのはスミルノフ[1)]である．

スミルノフの仕事も，広い意味では，SLE や共形場の理論の研究の近年の大きな流れの中にあると考えるべきなのだろうが，彼の証明にはそういった「飛び道具」はいっさい登場しない．2次元パーコレーションの臨界点についての前世代までの堅

*4)　今後も，「弧」というときには，境界上の二点を，左回りに結ぶような境界の一部分を意味することにする．

実な蓄積をフルに活用し，さらに，三角格子パーコレーションの臨界点では後述する (11) という信じがたい対称性が成り立つことを絶妙な確率論的な議論で証明し，それが理論の共形不変性と本質的に関わることを示したのである．「壮大な建築物」というタイプとは正反対の，鋭利な刃物で問題の核心を一瞬にして貫くような美しく非凡な（そして学んだ者の心に残る）業績である．

共形不変性は自明とはほど遠い事を強調しておこう．最も簡単な場合として，$\varOmega = \varOmega'$ が円盤状の領域で，$\varPhi$ が単なる回転だとしよう．このとき (5) は連結確率が回転不変であることを表している．もともとのパーコレーションは三角格子の上に定義されていたのだから，δ が有限のときには，連結確率は三角格子特有の異方性を示す．ところが，連続極限ではそのような格子の方向が「見えなく」なって回転対称性が完全に回復するというのだ．これだけでも十分に非自明である．

だが，(5) は遙かにすさまじい内容を含んでいる（図 5）．$\varOmega$ と $\varOmega'$ は有界で単連結な開集合なら何でもかまわないし $\varPhi$ も全く任意の正則関数だ．**好き勝手な正則関数で $\varOmega$ を「ぐにょーっ」と曲げてしまっても，対応する弧をとれば，連結確率は全く変わらない**というのだ[*5]．何らかの「直観」で理解できるような話ではない！

黒と白の碁石を半々にランダムに置いていくだけで，このような対称性をもった関数が定義されてしまう．臨界現象はわれわれの想像を絶する非自明な数理を生み出しうるのだ．

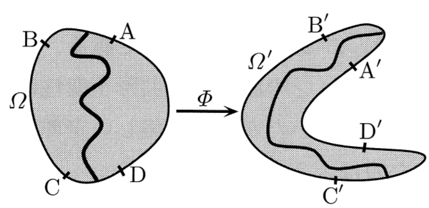


図 5　連結確率の共形不変性．弧 $\overparen{\mathrm{AB}}$ と弧 $\overparen{\mathrm{CD}}$ が結ばれる確率は，弧 $\overparen{\mathrm{A'B'}}$ と弧 $\overparen{\mathrm{C'D'}}$ が結ばれる確率と等しい．

*5)　言うまでもないが，三角格子まで「ぐにょーっ」と曲げるわけではない（三角格子まで変換するなら不変性は自明）．まっすぐな三角格子 (2) から $\varOmega'$ の内側に入る部分を切り出して，そこでパーコレーションの問題を考えるのだ．

3. カーディーの表式

スミルノフ[1]は，上の定理 1 よりも強力な以下の結果を示している．

定理 2：定理 1 と同様に，集合 $\varOmega$ とその境界上の点 A, B, C, D をとる．一辺の長さが 1 の正三角形を考え，その頂点を（左回りに）$\tilde{\mathrm{A}}$, $\tilde{\mathrm{B}}$, $\tilde{\mathrm{C}}$ とし，その内部の領域を $\tilde{\varOmega}$ とする．複素関数論の基本的な結果によれば，$h(\mathrm{A}) = \tilde{\mathrm{A}}$, $h(\mathrm{B}) = \tilde{\mathrm{B}}$, $h(\mathrm{C}) = \tilde{\mathrm{C}}$ を満たす一対一の正則関数 $h : \varOmega \to \tilde{\varOmega}$ が存在し一意的である（図 6）．よって正三角形の辺上の点 $\tilde{\mathrm{D}} = h(\mathrm{D})$ が一意的に決まる．このとき，

$$f(\varOmega; \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}) = (\tilde{\mathrm{C}} \text{ と } \tilde{\mathrm{D}} \text{ の距離 }) \quad (6)$$

が成り立つ．

$\partial\varOmega$ 上の四点の内の三つをちょうど正三角形の頂点に写してやれば，連結確率は単に二点間の距離で表されるというのだ．何と簡明な！ (6) は長方形での連結確率についてカーディーが共形場の理論を使って導いた予想[2]をカレルソンが書き直した表式である．上の h が具体的に計算できるような $\varOmega$ と A, B, C, D については，連結確率 $f(\varOmega; \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})$ が正確に計算できることになる．

定理 2 が得られれば，定理 1 は簡単に示される．定理 1 の状況において $h' = h \circ \varPhi^{-1}$ とすれば，これは $\varOmega'$ を正三角形 $\tilde{\varOmega}$ に写す正則関数になっている．もちろん四つの点 $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}', \mathrm{D}'$ は

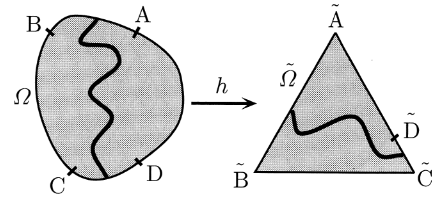


図 6　領域 $\varOmega$ を一辺が 1 の正三角形 $\tilde{\varOmega}$ に写せば連結確率は単に $\tilde{\mathrm{C}}$ と $\tilde{\mathrm{D}}$ の距離になる！

$\widetilde{\mathrm{A}}, \widetilde{\mathrm{B}}, \widetilde{\mathrm{C}}, \widetilde{\mathrm{D}}$ に写されるので，(6) により，連結確率 $f(\Omega'; \mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}', \mathrm{D}')$ は $\widetilde{\mathrm{C}}$ と $\widetilde{\mathrm{D}}$ の距離に等しい．よって (5) が成り立つ．

4. 写像 *h* の構成

スミルノフによる定理 2 の証明の基本的なアイディアを見よう．核心となるのは Ω から正三角形 $\tilde{\Omega}$ への正則関数 h である．定理 2 で述べたように，正則関数 h の存在は複素関数論の一般論の帰結だが，それだけでは h の具体形も連結確率との関係も全く分からない．驚くべきことに，スミルノフは，**絶妙な事象の確率を用いて h を具体的に構成してしまうのだ．**

定理 1 と同様の Ω をとり，境界 $\partial\Omega$ 上に左回りに配置した三点 A, B, C を任意に選んで固定する．ここで四点目の D が登場しないのが極めて巧みなところだと後で分かる．再び三角格子 Ω_δ をとり，いずれかの（一辺が δ の）三角形の中点 z について $E_{\mathrm{A;B,C}}(z)$ を「●の道によって A, z と B, C が分離される*6)」という事象としよう（図 7）．事象 $E_{\mathrm{A;B,C}}(z)$ の確率を考え，$\delta \downarrow 0$ の極限をとったものを $h_{\mathrm{A;B,C}}(z)$ とする．

事象 $E_{\mathrm{A;B,C}}(z)$ についての簡単な考察から，(i) $h_{\mathrm{A;B,C}}(\mathrm{A}) = 1$ であること，(ii) z が弧 $\widehat{\mathrm{BC}}$ の上にあるなら $h_{\mathrm{A;B,C}}(z) = 0$ であることが示される（どちらも絵を描けば，大ざっぱな雰囲気は納得できると思う）．

A，B，C の役割を順に入れ替えることで，

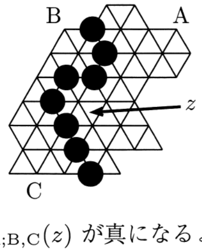


図 7　事象 $E_{\mathrm{A;B,C}}(z)$ が真になるようなパターン（肝心の●だけを描いた）．

*6)　より正確に言えば，「●の連結した道があり，それを取り除くと Ω_δ は二つの連結部分に分かれ，その一方に A と z があり，他方に B と C がある」ということ．

$h_{\mathrm{B;C,A}}(z)$ と $h_{\mathrm{C;A,B}}(z)$ を定義する．そして，

$$h(z)=\frac{h_{\mathrm{A;B,C}}(z)+\tau\, h_{\mathrm{B;C,A}}(z)+\tau^2\, h_{\mathrm{C;A,B}}(z)}{\sqrt{3}} \tag{7}$$

$$s(z)=h_{\mathrm{A;B,C}}(z)+h_{\mathrm{B;C,A}}(z)+h_{\mathrm{C;A,B}}(z) \tag{8}$$

により複素関数 $h(z)$ と実関数 $s(z)$ を定義する．ここで τ は (3) で定義した「単位ベクトル」である．複素関数を定義するのに二つの実関数を $f(x)+ig(x)$ のように足し合わせるのが普通だが，ここでは三つの実関数と τ を使っている．これも理論の核心に関わる点である．

これらの関数についての次の事実が本質的である．証明のアイディアは次節で述べる．

補題 1：$h(z)$ は Ω 上で正則である．$s(z)$ は Ω 上で一定値 1 をとる．

以上の結果を認めれば，半ば機械的な評価によって，定理 2 が得られる．

上の (ii) より $h_{\mathrm{B;C,A}}(\mathrm{A})=h_{\mathrm{C;A,B}}(\mathrm{A})=0$ だから，(i) とあわせて $h(\mathrm{A})=1/\sqrt{3}$ である．同様にして，$h(\mathrm{B})=\tau/\sqrt{3}$, $h(\mathrm{C})=\tau^2/\sqrt{3}$ もいえる．これら三点 $h(\mathrm{A})$, $h(\mathrm{B})$, $h(\mathrm{C})$ は一辺の長さが 1 の正三角形の頂点をなしている．

さらに，z を弧 $\widehat{\mathrm{BC}}$ の上にとると (ii) より $h(z)=\{\tau\, h_{\mathrm{B;C,A}}(z)+\tau^2\, h_{\mathrm{C;A,B}}(z)\}/\sqrt{3}$ である．$s(z)=1$ と (ii) から $h_{\mathrm{B;C,A}}(z)+h_{\mathrm{C;A,B}}(z)=1$ だから，上の $h(z)$ は $h(\mathrm{B})$ と $h(\mathrm{C})$ を結ぶ線分上にあることが分かる．同じ考察は他の弧と線分についても成り立つ．結局，$h(z)$ は領域 Ω を一辺が 1 の正三角形の内部に写す正則関数である．

連結確率については，事象 $E_{\mathrm{A;B,C}}(z)$ の定義より

$$f(\Omega;\mathrm{A,B,C,D})=h_{\mathrm{A;B,C}}(\mathrm{D}) \tag{9}$$

となっている．D は弧 $\widehat{\mathrm{CA}}$ 上にあるから，(ii) より $h_{\mathrm{B;C,A}}(\mathrm{D})=0$ であり，$s(z)=1$ から $h_{\mathrm{A;B,C}}(\mathrm{D})+h_{\mathrm{C;A,B}}(\mathrm{D})=1$ である．以上を全てあわせれば，

$$f(\Omega;\mathrm{A,B,C,D})=\frac{\sqrt{3}\,h(\mathrm{D})-\tau^2}{1-\tau^2} \tag{10}$$

となり，右辺は $h(\mathrm{C})$ と $h(\mathrm{D})$ の距離である．

5. スミルノフの 2π/3 対称性

スミルノフの理論の核心は $h(z)$ の正則性についての補題 1 である．証明の中心になる確率論的アイディアを述べる余裕はないが，どういう方向で証明が進むのかを大ざっぱに見ておこう．

領域 Ω とそれを三角格子に分割した Ω_δ を考える．z, z' をそれぞれ格子の中の三角形の中点とする．$P_{\mathrm{A;B,C}}(z,z')$ を，「事象 $E_{\mathrm{A;B,C}}(z')$ が真で，かつ，事象 $E_{\mathrm{A;B,C}}(z)$ が偽である」確率としよう（図 8）．

補題 2：z を三角格子 Ω_δ の一つの三角形の中点とし，$z+\eta$, $z+\tau\eta$, $z+\tau^2\eta$ がそれぞれ隣接する三角形の中点となるように $\eta\in\mathbb{C}$ をとる（よって $|\eta|=1/\sqrt{3}$）．任意の $\delta>0$ と任意の A, B, C，そして上の条件を満たす任意の z と η について，

$$P_{\mathrm{A;B,C}}(z,z+\eta)=P_{\mathrm{B;C,A}}(z,z+\tau\eta)=P_{\mathrm{C;A,B}}(z,z+\tau^2\eta) \tag{11}$$

が成り立つ．

$z+\eta$, $z+\tau\eta$, $z+\tau^2\eta$ は z の最隣接点で，z を中心に 120 度ずつ「回って」いる．それと連動して，三つの境界の点 A, B, C も順次入れ替わっている．こういう「回転」に対して確率 $P_{\mathrm{A;B,C}}(z,z')$ は不変だというのだ．私は初めてこの補題 2 をみたと

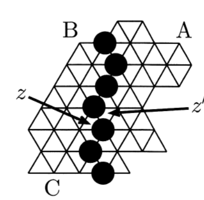


図 8　事象 $E_{\mathrm{A;B,C}}(z')$ が真，事象 $E_{\mathrm{A;B,C}}(z)$ が偽になるパターン．

きは「ただし領域が120度回転について不変でA, B, Cも・・・」といった対称性の条件がどこかについているのだろうと思った．しかし，おそるべきことに，そのような付加条件はなく，補題2は任意のいびつな形の領域について成り立つのだ！スミルノフによる補題2の証明はたったの15行．もちろん解読するには（自分で図をいくつも描いて）時間をかける必要があるが，決して大仰な証明ではない．絶妙の場合分けをして，1節にも登場した「白黒反転」の技術を（より高級に）用いるだけである．

(11)のような対称性が存在するという事実だけでも驚きだが，もちろん，真に素晴らしいのはこれが関数 $h(z)$ の正則性と深く結びつくということだ．$h_{\mathrm{A;B,C}}(z)$ が事象 $E_{\mathrm{A;B,C}}(z)$ の確率だったので，(11)から，$h_{\mathrm{A;B,C}}(z+\eta)-h_{\mathrm{A;B,C}}(z) \simeq h_{\mathrm{B;C,A}}(z+\tau\eta) - h_{\mathrm{B;C,A}}(z) \simeq h_{\mathrm{C;A,B}}(z+\tau^2\eta) - h_{\mathrm{C;A,B}}(z)$ という対称性が示される*7)．これを，$h(z)$ の定義に代入すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\eta}\{h(z+\eta)-h(z)\}\\
\simeq\ &\frac{1}{\tau\eta}\{h(z+\tau\eta)-h(z)\}\\
\simeq\ &\frac{1}{\tau^2\eta}\{h(z+\tau^2\eta)-h(z)\} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

という関係が得られる．(1)と比べると，これが「$h(z)$ を $\eta, \tau\eta, \tau^2\eta$ の三つの方向で微分した結果が等しい」ことを意味しているのが分かるだろう．**通常のコーシー・リーマン関係式では実数方向と虚数方向の二種類の微分を考えるが，ここでは複素平面内で互いに120度の角をなす三つの方向についての微分が等しいことをみている．** (12)があれば，補題1を示すのは技術的な問題である．

最後に証明の流れをざっと振り返っておこう．本来の問題設定では境界上に四点A, B, C, Dが与えられた．しかし，スミルノフは敢えてA, B, Cの三点を残し，残りの一点は領域内を自由に動く z で置き換えた．これによって，「120度回転対称性」(11)が明瞭になる．特に，120度構造を直接反映した「複素数単位」τ によって定義した複素関数 $h(z)$ は，「120度コーシー・リーマン関係式」(12)を満たすのである．このような「120度回転対称性」は単なる技術的なものではなく，2次元パーコレーションの臨界点に固有の深い性質の反映ではないかとも推測されている．

スミルノフの仕事を契機に三角格子パーコレーションの臨界点についての理解は一気に深まり，その後は SLE_6 との関係をフルに利用した解析が進められている．単に連結確率を見るだけでなく，パーコレーションの「中身」で何がおきているかについての理解も進んできた．そのような発展についてはより専門的な解説を待ちたい．

本稿に貴重なコメントをくださった香取眞理氏に感謝する．

*7) この節では，やや不正確な記法になるが，$h_{\mathrm{A;B,C}}(z)$, $h(z)$ 等は全て有限の δ についての関数とする．$\simeq$ は $\delta\downarrow 0$ で等式になる関係を示す．

参考文献

1) S. Smirnov, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **333**, 239–244 (2001). スミルノフの web page (`http://www.math.kth.se/~stas/`) の Recent Papers から入手可能．なお，スミルノフの論文は簡潔で難解だが，彼の議論をより分かりやすく改良した V. Beffara の講演録 *Cardy's formula on the triangular lattice, the easy way* が著者の web page (`http://www.umpa.ens-lyon.fr/~vbeffara/index.php`) で公開されている．

2) J. Cardy, *J. Phys.* **A 25**, L201–L206 (1992).

（たざき・はるあき，学習院大学理学部）

群の表現論と極限定理
オルシャンスキーとオクニコフ



洞　彰人

はじめに

「確率論的物理観」の中の一つの記事として，群の表現と確率論の極限定理の関わりの一断面を眺めてみたい．副題に人名を添えるという本特集の趣向に従い，2 名の数学者を挙げた．本稿の話題を筆者の個人的な観点から見たときに一番のキーパーソンになるのはおそらく G. Olshanski であろう．世間的な知名度（？）からしてもう 1 人 A. Okounkov を挙げておいたが，他の中心人物に A. Vershik, S. Kerov（故人），P. Diaconis，それに若い世代の A. Borodin たちがいる．

確率と群の表現の最も素朴で本質的な接点に，表現の（既約）分解とそこに生じる**ランダムウォーク**がある．群の表現に含まれる（既約）成分とその大きさの特定は表現を扱う際の基本的な問題であるし，ランダムウォークは確率現象の核心と言える．本稿では，確率論と表現論が交錯する舞台としてこのような分岐現象を取り上げ，時間と空間に関する何らかの（スケーリング）極限を軸に話を進める．この際，統計力学の概念やモデルを介在させることが，背景・動機づけの面からと同時に技術的な面でもしばしば有用である．以下なるべく話を具体的にするため，対称群と Young グラフに題材を絞り，さらに Young グラフの一部分として現れる Pascal 三角形にも留意しよう．

1. 対称群と Young グラフ

群 G の線形空間 V への作用を G の表現と呼び，その作用に関して不変な V の部分空間が自明なものしかないとき，その表現は**既約**であると言う．群は系の対称性を記述するものであり，既約表現とはそのような対称性を備えた挙動を示す極小の存在（実在と言ってもよい）と見なせる．n 個の文字の置換全体のなす群を n 次対称群と呼び，$\mathcal{S}_n$ で表す．文献 3) は対称群を含む群の表現論への導入記事で，歴史的に重要な文献の情報も多く含んでいる．$\mathcal{S}_n$ の既約表現の同値類は，サイズが n の Young 図形で数え上げられることが知られている．**Young 図形**とは第 1 象限に「隅（原点）から几帳面に」正方形の箱を積んだもので，箱の数がそのサイズである．図 1 左はサイズが 5 の Young 図形であり，新たに 1 つ箱を積んでサイズ 6 のものを作る方法は 3 通りある（点線部が箱を積める場所）．

サイズ n の Young 図形全体を $\boldsymbol{Y}_n$ で表す．$\boldsymbol{Y} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{Y}_n$, $\boldsymbol{Y}_0 = \{\emptyset\}$ とおく．以後しばし

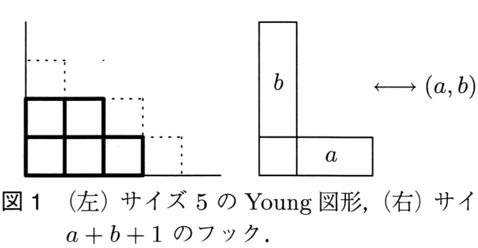


図 1　（左）サイズ 5 の Young 図形，（右）サイズ $a+b+1$ のフック．

ば，Young 図形とそれに対応する対称群の既約表現の同値類，さらにそこから一つ選んだ代表元（つまり既約表現）を区別せずに同一記号で取り扱う．$\lambda \in \boldsymbol{Y}_n$ と $\mu \in \boldsymbol{Y}_{n+1}$ が 1 個の箱の増減で移り合うとき，$\lambda \nearrow \mu$ と書く．$\boldsymbol{Y}$ を頂点集合とし，$\nearrow$ で隣接関係を定めたグラフを **Young グラフ**と呼ぶ．Young グラフの頂点はサイズによって自然に層化されている．出だしの数層を実際に描いてみられよ．図 1 右のような Young 図形をその形状から特に**フック**と呼ぶ．図のフックはサイズが $a+b+1$ である．これに第 1 象限の格子点 (a,b) を対応させる．そうすると，Young グラフの頂点をフックに制限した部分グラフは原点 $(0,0)$ を要とする **Pascal 三角形**になることがわかるだろう．$\lambda \in \boldsymbol{Y}_n$ に対応する $\mathcal{S}_n$ の既約表現を $\mathcal{S}_{n-1}$ に制限すればもはや一般には既約でなくなる．実際，それは互いに非同値な $\mathcal{S}_{n-1}$ の既約表現に分解され，既約成分として $\mu \nearrow \lambda$ なる $\mu \in \boldsymbol{Y}_{n-1}$ に対応するものが現れる．また，表現に対して制限と双対的な誘導という操作があるが，$\lambda \in \boldsymbol{Y}_n$ を $\mathcal{S}_{n+1}$ に誘導した表現の既約成分が $\lambda \nearrow \nu$ なる $\nu \in \boldsymbol{Y}_{n+1}$ たちで与えられる．こうして Young グラフは対称群の族 $\{\mathcal{S}_n\}$ の既約表現たちの制限・誘導の相互関係（分岐則）を余すところなく記述する．

2. Young グラフ上の調和関数

分岐則の極限状況を論じる際，確率論的直観を生かすために，Young グラフの経路空間上の測度を考えるのが便利である．$\emptyset$ から出発する**経路**とは，隣接する Young 図形の無限列 $t = (t(0) \nearrow t(1) \nearrow \cdots \nearrow t(n) \nearrow \cdots)$, $t(n) \in \boldsymbol{Y}_n$, のことである（常に $t(0) = \emptyset$, $t(1)$ は箱 1 つ）．つまり，経路とは Young 図形の成長の履歴に他ならない．$\emptyset$ から出発する経路全体を $\mathcal{T}$ で表す．第 n 層で止まる長さ n の有限の経路全体を $\mathcal{T}_n$ と記す．$m < n$ に対して $\lambda \in \boldsymbol{Y}_m$ から $\mu \in \boldsymbol{Y}_n$ に至る経路の数を $d(\lambda, \mu)$ で表す．Young グラフの構成の仕方より，$d(\lambda) := d(\emptyset, \lambda)$ は λ に対応する既約表現の次元に等しい．例えば λ が図 1 右のフックのとき，Pascal 三角形の経路を数えるのと同じで $d(\lambda) = \binom{a+b}{a}$ となる．一般の Young 図形についても**フック公式**と呼ばれる $d(\lambda)$ を与える式がある．

経路空間 $\mathcal{T}$ には自然に完全不連結でコンパクトな位相が入り，その Borel 集合族の構造は簡明である．筒集合全体に矛盾なく与えられた有限加法的測度は常に可算加法的に拡張できる．ここで筒集合とは，有限経路 $u \in \mathcal{T}_m$ に対して定まる $C_u = \{t \in \mathcal{T} | t(j) = u(j), j = 1, \cdots, m\}$ の形の $\mathcal{T}$ の部分集合である．$\mathcal{T}$ 上の確率測度 M の筒集合 C_u での値が経路 u の終点のみに依存するとき，M は**中心的**であると言う．この中心性は $\mathcal{T}$ に働く置換群に関する不変性とも見なせる．$\mathcal{T}$ 上の中心的確率測度全体を $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ で表す．$\mathcal{M}(\mathcal{T})$ の端点（異なる 2 元の凸結合で表せない元）をエルゴード的測度と呼ぶ．$M \in \mathcal{M}(\mathcal{T})$ のとき，$\lambda \in \boldsymbol{Y}$ を終点とする経路 u を任意にとって $\varphi(\lambda) = M(C_u)$ とおくと，M の加法性より φ は**調和性**

$$\varphi(\lambda) = \sum_{\mu : \lambda \nearrow \mu} \varphi(\mu) \tag{1}$$

をみたす．$\boldsymbol{Y}$ 上非負値で (1) 式と $\varphi(\emptyset) = 1$ をみたす φ を Young グラフ上の**調和関数**と呼ぼう．$\boldsymbol{Y}$ 上の調和関数全体を $\mathcal{H}(\boldsymbol{Y})$ で表す．今は $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ から $\mathcal{H}(\boldsymbol{Y})$ への写像を作ったが，本段落の最初に述べたことより，この写像は全単射であることがわかる．$M \in \mathcal{M}(\mathcal{T})$ は $\boldsymbol{Y}$ 上の **Markov 連鎖**を導く．すなわち，$\mu \in \boldsymbol{Y}_n$ で終る有限経路 $u \in \mathcal{T}_n$ での条件つき確率が

$$\begin{aligned} & M\big(t(n+1) = \lambda \big| t(j) = u(j), j = 1, \cdots, n\big) \\ &= M\big(t(n+1) = \lambda \big| t(n) = \mu\big) \\ &= \varphi(\lambda)/\varphi(\mu) \end{aligned} \tag{2}$$

をみたす．M の中心性より，第 n 層 $\boldsymbol{Y}_n$ への M の射影（像測度）つまり時刻 n での分布が

$$M_n(\lambda) := M(\{t \in \mathcal{T} | t(n) = \lambda\}) = d(\lambda)\varphi(\lambda)$$

で与えられる．以下の節で，Young グラフ上の調

和関数と (2) 式の推移確率をもつ Markov 連鎖の具体例を扱う．

3. 極限定理（Pascal 三角形）

前節では術語の定義が続いたので，Pascal 三角形の場合にそれらを翻訳してみよう．頂点集合は $\boldsymbol{L}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{L}_n$，$\boldsymbol{L}_n=\{(a,b)|a,b\in\boldsymbol{N},a+b=n\}$（$\boldsymbol{N}$ は 0 も含めた自然数全体），隣接関係は $(a,b)\nearrow(a+1,b)$，$(a,b)\nearrow(a,b+1)$ で与えられる．Pascal 三角形の経路空間 $\mathcal{T}_{\mathrm{Pas}}$ は $\{0,1\}^{\infty}$ と同一視できる．$\{0,1\}^{\infty}$ には無限対称群 $\mathcal{S}_{\infty}$（$\boldsymbol{N}$ の有限置換全体）が自然に作用するが，経路空間上で中心的という性質はこの $\mathcal{S}_{\infty}$ に関する不変性に他ならない．一方，de Finetti の定理により $\{0,1\}^{\infty}$ 上の $\mathcal{S}_{\infty}$-不変確率測度は直積測度 ν^{∞} の重ね合わせ（凸結合）で書け，**エルゴード性**が同一測度の直積（すなわち独立同分布のコイン投げモデル）と同義になる．Young グラフ上で話を展開するときには確率論の常套手段である**独立性**が表に出てこないが，エルゴード性が実質的にそれに代わるものだと言える．

$\mathcal{T}_{\mathrm{Pas}}$ 上では，経路の個数を直接数えることにより $d((a,b),(c,d))=\binom{c+d-a-b}{c-a}$ を得る．前節の仕方で中心的測度 $M\in\mathcal{M}(\mathcal{T}_{\mathrm{Pas}})$ と調和関数 $\varphi\in\mathcal{H}(\boldsymbol{L})$ の対応を与えておく．

定理 1 M がエルゴード的ならば，M に関してほとんどすべての経路 $t\in\mathcal{T}_{\mathrm{Pas}}$ について次が成り立つ：任意の $(a,b)\in\boldsymbol{L}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d((a,b),t(n))}{d(t(n))}=\varphi(a,b). \qquad (3)$$

（個別エルゴード定理やマルチンゲールの収束定理の帰結と言えるが，なるべく初等的な証明を与えてみられよ.）

(3) 式より，$t(n)=(c,d)\in\boldsymbol{L}_n$ とおくとき $\lim_{n\to\infty}c/(c+d)=:p\in[0,1]$ の存在が言え，任意の $(a,b)\in\boldsymbol{L}$ に対して

$$\varphi(a,b)=p^a(1-p)^b=:\Phi((a,b),p) \qquad (4)$$

が成り立つ．すなわち Pascal 三角形上の調和関数の端点は $p\in[0,1]$ でパラメトライズされ，(4) 式で表示される．この事実をして Pascal 三角形の **Martin 境界**が $[0,1]$ であると称する．$\boldsymbol{L}$ から $[0,1]$ への写像 ι を $\iota(a,b)=a/(a+b)$ で定める．各層 $\boldsymbol{L}_n$ では ι は境界 $[0,1]$ への埋め込みを与える．$\Phi(\ \cdot\ ,p)$ に対応するエルゴード的測度が (2) 式を通して定める $\boldsymbol{L}$ 上の Markov 連鎖はコイン投げそのものである．(4) 式より時刻 n での分布は $\boldsymbol{L}_n$ 上の 2 項分布であり，その ι による $[0,1]$ への像測度は $n\to\infty$ でデルタ測度 δ_p に弱収束する（コイン投げの大数の法則）．

円板上の調和関数は境界（円周）上の測度による **Poisson 積分表示**をもち，その測度はもとの調和関数から半径方向の極限を取って得られる．Pascal 三角形の場合に (4) 式の Φ を核とする積分表示を見てみよう．Pascal 三角形上の任意の調和関数 φ に対し，対応する経路空間上の中心的測度の時刻 n での分布

$$M_n(a,b)=\binom{a+b}{a}\varphi(a,b),\quad (a,b)\in\boldsymbol{L}_n$$

の ι による像を ι_*M_n と書く．$n\to\infty$ で ι_*M_n が $[0,1]$ 上の確率測度 Q に弱収束するとすれば，大雑把な計算により，$(a,b)\in\boldsymbol{L}_m$ に対して

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\Phi((a,b),p)Q(dp)\\
&=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 p^a(1-p)^b(\iota_*M_n)(dp)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{(x,y)\in\boldsymbol{L}_n}\left(\frac{x}{n}\right)^a\left(1-\frac{x}{n}\right)^b\binom{n}{x}\varphi(x,y)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{(x,y)\in\boldsymbol{L}_n}\frac{x^ay^b}{n^m}\frac{n!}{x!y!}\varphi(x,y)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{(x,y)\in\boldsymbol{L}_n}d((a,b),(x,y))\varphi(x,y)\\
&=\varphi(a,b) \qquad (5)
\end{aligned}$$

を得る．最後の等式では φ の調和性 (1) を繰り返し用いた．いわゆるコンパクト性の議論を援用することにより，(5) 式が実際に φ の Poisson 積分表示を与えていることが示される．例えば重ね合

わせの測度 Q が $[0,1]$ 上の一様分布のとき，対応する調和関数と Markov 連鎖の推移確率を計算し，それがどのような（独立試行でない）コイン投げモデルとして解釈できるか考えてみられよ．

4. 極限定理（Young グラフ）

前節の結果を Young グラフ上で展開しよう．第2節で述べた経路空間 $\mathcal{T}$ 上の中心的確率測度全体 $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ と Young グラフ上の調和関数全体 $\mathcal{H}(\boldsymbol{Y})$ との間の1対1対応（$M \leftrightarrow \varphi$）を再度思い出しておく．定理1はここでもそのままの形で成り立つ．

定理2 $M \in \mathcal{M}(\mathcal{T})$ がエルゴード的ならば，M に関してほとんどすべての経路 $t \in \mathcal{T}$ について次が成り立つ：任意の $\lambda \in \boldsymbol{Y}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(\lambda, t(n))}{d(t(n))} = \varphi(\lambda). \tag{6}$$

Pascal 三角形の場合と異なり，(6) 式左辺の分子の計算は容易でない．また，Young グラフ上の調和関数，経路空間上の測度とそのエルゴード性について，Pascal 三角形のときほどピンと来ないかもしれない．(6) 式から Martin 境界がすぐに読み取れるわけでもない．実は Young グラフの境界は無限次元の単体になり，端的な調和関数が Schur 関数を用いて表せるのだが，その辺の事情は，無限対称群と Young グラフを双対的に考察していくほうがわかりやすいと思う．

既に登場したが，$\boldsymbol{N}$ の有限置換全体のなす群を無限対称群と呼び $\mathcal{S}_\infty$ で表す．文字 $n+1, n+2, \cdots$ の固定群として $\mathcal{S}_n$ を $\mathcal{S}_\infty$ に自然に埋め込み，$\mathcal{S}_\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{S}_n$ とみなす．群 G 上の $\boldsymbol{C}$（複素数全体）-値関数 f が任意の l 個の $\alpha_j \in \boldsymbol{C}$，$g_j \in G$ $(j = 1, \cdots, l)$ に対して

$$\sum_{j,k=1}^{l} \overline{\alpha_j} \alpha_k f(g_j^{-1} g_k) \geq 0 \tag{7}$$

をみたすとき，f は**正定値**（または正定符号）であると言う．また，各共役類上で一定値の関数を**類関数**と呼び，単位元での値が1のとき正規化されていると言う．$\lambda \in \boldsymbol{Y}_n$ に対応する $\mathcal{S}_n$ の既約表現の指標（つまり表現行列のトレース）を χ^λ と記す．χ^λ は $\mathcal{S}_n$ 上の正定値類関数である．置換のサイクル分解の型を考えることにより，$\mathcal{S}_n$ の共役類全体も $\boldsymbol{Y}_n$ でパラメトライズされる．$\rho \in \boldsymbol{Y}_n$ に対応する共役類での χ^λ の値を χ^λ_ρ と書く．

$\mathcal{S}_\infty$ 上の正規化された正定値類関数全体を $\mathcal{K}(\mathcal{S}_\infty)$ で表す．$f \in \mathcal{K}(\mathcal{S}_\infty)$ を $\mathcal{S}_m$ に制限しても類関数だから

$$f|_{\mathcal{S}_m} = \sum_{\lambda \in \boldsymbol{Y}_m} \varphi(\lambda) \chi^\lambda \tag{8}$$

と Fourier 展開でき，正定値性より各係数は $\varphi(\lambda) \geq 0$ をみたす．また，異なる $\mathcal{S}_m$ への制限の両立条件は $\varphi(\lambda)$ の調和性を示す (1) 式に他ならない．したがって (8) 式は $\mathcal{K}(\mathcal{S}_\infty)$ と $\mathcal{H}(\boldsymbol{Y})$ との間の全単射を与えることがわかる．第2節の事実と合わせて $f \leftrightarrow \varphi \leftrightarrow M$ の対応の下での

$$\mathcal{K}(\mathcal{S}_\infty) \simeq \mathcal{H}(\boldsymbol{Y}) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{T}) \tag{9}$$

を得る．$\mathcal{K}(\mathcal{S}_\infty)$ の中で f が端点であるという性質は，「$g, h \in \mathcal{S}_\infty$ の台（実際に動かす文字全体）が共通部分を持たなければ $f(gh) = f(g)f(h)$ が成り立つ」という意味の乗法性で特徴づけられる．Pascal 三角形の場合は独立性と経路空間上の測度のエルゴード性との関係が見易かったが，Young グラフの場合はそれが無限対称群での対応物のもつ乗法性（積の平均の性質）として現れている．$\mathcal{K}(\mathcal{S}_\infty)$ の端点を $\mathcal{S}_\infty$ の**指標**と呼ぶ．$\mu \in \boldsymbol{Y}_n$ に対し，$\mathcal{S}_m$ への制限を取ると

$$\frac{1}{d(\mu)} \chi^\mu|_{\mathcal{S}_m} = \sum_{\lambda \in \boldsymbol{Y}_m} \frac{d(\lambda, \mu)}{d(\mu)} \chi^\lambda \tag{10}$$

が成り立つ．したがって，(9) の端点すなわち $\mathcal{S}_\infty$ の指標 f と対応するエルゴード的測度 M について (6), (8), (10) 式をつなげば，M に関してほとんどすべての経路 t に沿って，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d(t(n))} \chi^{t(n)} = f \tag{11}$$

が各 $\mathcal{S}_m$ 上で成り立つ．(11) 式の左辺の正規化された既約指標のサイクルでの値の漸近挙動は，

Murnaghan の本[7]ですでに示唆されているように，よく知られている．これらをまとめて，$\mathcal{S}_\infty$ の指標 f と (9) で対応する φ と M について次の事実が成り立つ．$\lambda \in \boldsymbol{Y}$ の第 i 行と第 j 列の長さをそれぞれ λ_i, λ'_j と書く．

定理 3（Thoma[9], Vershik–Kerov[10]）M に関してほとんどすべての経路 t に沿って

$$\lim_{n\to\infty} t(n)_i/n =: \alpha_i, \quad \lim_{n\to\infty} t(n)'_i/n =: \beta_i$$

が存在し，$\sum_{i=1}^\infty(\alpha_i+\beta_i) \le 1$ が成り立つ．さらに自然数 k に対して

$$p_k(\alpha,\beta) := \sum_{i=1}^\infty \alpha_i^k + (-1)^{k-1}\sum_{i=1}^\infty \beta_i^k, \quad k \ge 2$$
$$p_1(\alpha,\beta) := 1 \qquad (12)$$

とおくと，$\mathcal{S}_\infty$ の ρ-型の共役類での f の値が

$$p_\rho(\alpha,\beta) := \prod_j p_{\rho_j}(\alpha,\beta), \quad \text{（有限積）} \qquad (13)$$

で与えられる．

定理 3 は Young グラフの Martin 境界が

$$\Delta := \left\{ (\alpha_i,\beta_i)_{i=1}^\infty \,|\, \alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \cdots \ge 0, \; \beta_1 \ge \beta_2 \ge \cdots \ge 0, \sum_{i=1}^\infty (\alpha_i+\beta_i) \le 1 \right\} \qquad (14)$$

であることを示す．Δ は各点収束の位相でコンパクトになり，(13) 式の p_ρ は Δ 上の連続関数である．ここで (12) 式の $p_1 = 1$ の定義が重要で，実際 $\sum_{i=1}^\infty(\alpha_i+\beta_i)$ は Δ 上連続ではない．$\mathcal{S}_\infty$ の指標が (14) でパラメトライズされて (13) の表示をもつことは，Thoma が関数論的方法により最初に示した[9]．Δ を **Thoma 単体**と呼ぶことも多い．Vershik–Kerov[10]はそれを Young 図形の漸近挙動と関係づけ，確率論との関わりの端緒を開いた．パラメータ $(\alpha,\beta) \in \Delta$ に対応する点において，(8) 式と (13) 式より

$$p_\rho(\alpha,\beta) = \sum_{\lambda\in\boldsymbol{Y}_n} \varphi(\lambda)\chi_\rho^\lambda, \quad \rho \in \boldsymbol{Y}_n \quad (15)$$

が成り立つ．(15) 式の左辺は (12), (13) 式で定義されたもので，**べき和対称関数**に相当する．そうすると Frobenius の指標公式に類似した (15) 式を $\varphi(\lambda)$ について解いたもの

$$s_\lambda(\alpha,\beta) := \sum_{\rho\in\boldsymbol{Y}_n} \frac{1}{z_\rho}\chi_\rho^\lambda p_\rho(\alpha,\beta), \quad \lambda \in \boldsymbol{Y}_n \quad (16)$$

は **Schur 関数**に相当する（というわけで同じ記号を流用した）．ただし $\rho = (1^{m_1}2^{m_2}\cdots j^{m_j}\cdots)$ に対して $z_\rho = \prod_{j=1}^\infty j^{m_j} m_j!$ とおいた．繰り返すが $p_1(\alpha,\beta)=1$ という定義は重要で，$\beta_i = 0$ かつ $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i = 1$ ならば $s_\lambda(\alpha,0)$ は通常の Schur 関数の $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$ での値に一致する．(9) 式の端点の集合がこれで特定できたので，一般の元はそれらの重ね合わせで書ける．(5) 式の調和関数の Poisson 積分表示に当たる式は

$$\varphi(\lambda) = \int_\Delta s_\lambda(\alpha,\beta) Q(d\alpha d\beta), \quad \lambda \in \boldsymbol{Y}. \quad (17)$$

こうして Thoma 単体 Δ 上の確率測度が解析の対象として浮かび上がる．

例 1　$\alpha_i = 0, \beta_i = 0$ の場合．(12), (13) 式より，対応する $\mathcal{S}_\infty$ の指標は単位元 e にのるデルタ関数 δ_e である．(16) 式より端的な調和関数は

$$s_\lambda(0,0) = d(\lambda)/|\lambda|!, \quad \lambda \in \boldsymbol{Y} \qquad (18)$$

となる．対応する $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ 上のエルゴード的測度は **Plancherel 測度**と呼ばれる．(2) 式で与えられる Markov 連鎖の推移確率は誘導表現の既約成分の次元の大きさに比例している．この Markov 連鎖はしばしば Plancherel 成長過程と呼ばれる．時刻 n での分布は $d(\lambda)^2/|\lambda|!$ で与えられ，これも $\boldsymbol{Y}_n$ 上の Plancherel 測度と言う．

α,β の他の特殊値でも言うべきことがあるがここでは省略する．

5. 極限定理（Plancherel 集団）

前節の例 1 の Plancherel 成長過程は，Young 図形を $1/n$ のスケールで見ていくと消えてなくなる

という性格のものであった．これを面積を保つスケールの$1/\sqrt{n}$で$n \to \infty$にすれば，Plancherel測度に関してほとんどすべての経路に沿って，$1/\sqrt{n}$倍されたYoung図形は特徴的な**極限形状**に収束する．Plancherel測度についてはこの極限形状への収束の様々な相が詳しく研究されていて，副題に挙げた2人も大いに活躍するが，そろそろ紙面が尽きてきたので，一つの話題に軽く触れるにとどめる．

Plancherel測度ではかれば，サイズnが非常に大きいときはほとんどのYoung図形が極限形状の$\sqrt{n}$倍という格好をしているわけだが，そのとき第1行と第1列の長さは$2\sqrt{n}$の周りをゆらぐ．このゆらぎは$n^{1/6}$のオーダーであり，それで正規化して$n \to \infty$の極限を取ると，**ランダム行列**のGaussユニタリ集団の最大固有値のゆらぎに現れるTracy–Widomの分布に収束する．この結果[1)]を示したBaik–Deift–Johanssonは，最長行・列だけでなく任意個の行・列のゆらぎの挙動を予想した．この予想はOkounkov[8)]，Borodin–Okounkov–Olshanski[2)]，Johansson[5)]によって証明された．それらの際にも本質的な役目を担う点過程の方法が本特集のテーマと相性がよいかもしれないので，簡単に見ておこう．

まず，Young図形を$\boldsymbol{R}$や$\boldsymbol{Z}$上の点の配置としてコード化する方法が幾つかある（マヤ図形，Frobenius座標，…）．そうするとYoung図形の集団の上の確率測度からランダムな点配置すなわち点過程が導かれる．点をそこにのるデルタ測度と同一視し，点配置をアトム的な測度とみなしてもよい．ランダム行列とのアナロジーで言えば，この点配置がランダム行列の固有値分布に相当する．ランダムな点配置の総体というのはなかなか頭に入りにくいので，相関関数を考えるのが有用である．**相関関数**とは多次元版に進化したヒストグラムのようなもので，$\boldsymbol{Z}$上の配置ならば次のように定義される．各$n \in \boldsymbol{N}$につき，$x_1, \cdots, x_n \in \boldsymbol{Z}$に対して$\{x_1, \cdots, x_n\} \subset A$なる配置$A$全体の確率を$\rho_n(x_1, \cdots, x_n)$とおき，$\rho_n$を$n$点（相関）関数と呼ぶ．$\boldsymbol{R}$上の点配置ならば微小体積$dx_1 \cdots dx_n$でふくらませてそれと交わる配置$A$の確率を勘定すればよい．いずれにせよ重要なのは，これらのn点関数が何らかの2変数関数$K(x,y)$からn次の行列式やPfaffianの形で表示される場合があるということである．その場合はランダムな点配置のすべての情報が$K(x,y)$という核に集約されているわけなので，詳細な解析が可能になる．2点までの間の相関から任意のn点の相関がわかるという構造は，ある意味Gauss的であると言えよう．前段落で述べたBDJの問題もまさにこのような構造を有していて，サイズ無限大の極限の状況がAiry集団と呼ばれる点過程で記述される．

おわりに

「確率論的物理観」の例証には至らず，副題の人々もあまりいかされない記事になってしまったが，次の事項についても述べたかった．

1) $\mathcal{S}_\infty$の因子表現からさらに深く既約表現に踏み込む話．

2) Voiculescuの自由確率論との関わり[4)]．特に最近証明されたKerov予想について．

3) Kingman, JackなどのYoungグラフ以外の分岐グラフにまつわる確率論の話[6)]．

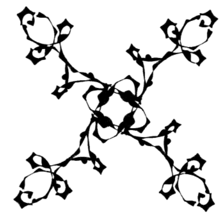
参考文献

1) J. Baik, P.A. Deift, K. Johansson, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), 1119–1178.
2) A. Borodin, A. Okounkov, G. Olshanski, *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), 481–515.
3) 平井武，数理科学 **540** (2008) 6月号．
4) 洞彰人，数学 **57** (2005), 242–254.
5) K. Johansson, *Ann. of Math.* **153** (2001), 259–296.
6) S. Kerov, *Asymptotic representation theory of the symmetric group and its applications in analysis*, Amer. Math. Soc., 2003.
7) F.D. Murnaghan, *The theory of group representations*, Johns Hopkins Press, 1938.
8) A. Okounkov, *Int. Math. Res. Not.* 2000 (2000), 1043–1095.
9) E. Thoma, *Math. Z.* **85** (1964), 40–61.
10) A.M. Vershik, S.V. Kerov, *Funct. Anal. Appl.* **15** (1981), 246–255.

（ほら・あきひと，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

ダイマー模型と幾何学

ケニオンとオクニコフ



高崎　金久

1. はじめに

ダイマー模型は 1960 年代に物理学者のカステレイン，テンパリー，フィッシャーの研究によって注目を集めた統計物理の可解模型の一種であるが，1990 年代には再び盛んに研究されるようになって，今日に至っている．その中でもケニオンとオクニコフの一連の共同研究[1~3]（最初の論文にはシェフィールドも共著者として加わっている）はダイマー模型の研究に新局面をもたらした画期的なものである．彼らはダイマー模型に内在する線形代数的構造からスペクトル曲線と呼ばれる複素代数曲線を引き出し，その代数幾何学的特徴や関連する諸概念（アメーバ，マーラー測度，ロンキン函数など）を用いて熱力学的極限の性質を明らかにした．この記事では彼らの研究の一端をダイマー模型の基礎知識とともに紹介する．なお，ケニオンがオクニコフの業績を解説した短い記事[4]や筆者が別の機会に書いた解説記事[5]も併せて参照されたい．

2. ダイマー模型

ダイマーはモノマーと呼ばれる分子が 2 個重合したものである．モノマーを黒丸，それを結ぶ部分を線で表せば，ダイマーは ●–● という形をしている．多数のダイマーが様々な配置をとり得る状況を想定し，それを統計力学的に定式化したのがダイマー模型である．ダイマーは勝手な位置におかれるのではなく，グラフ理論の言葉を借りれば，指定された「2 部グラフ」G において「完全マッチング」をなすような配置のみが許される．これらの言葉を説明しよう．

グラフはいくつかの頂点の集合とそれらを結ぶ辺の集合からなる 1 次元的構造である（ただし，あとで問題になる「平面的」グラフの場合には面も含めた 2 次元的構造が問題になる）．ダイマーを表すのに使った図 ●–● も 2 個の頂点と 1 本の辺からなるグラフと見なせる．

2 部グラフは，辺で結ばれた頂点どうしは異なる色をもつ，という条件を満たしつつすべての頂点を 2 色（以下では白と黒を使うことにする）に塗り分けられるグラフを意味する．例えば，平面上の平方格子や 6 角格子をグラフと見なせば 2 部グラフであるが（図 1），3 角格子は塗り分けに 3 色が必要なので 2 部グラフではない．

マッチングは辺で結ばれた頂点の対をいくつか選ぶことであり，互いに素な（つまり共通部分をもたない）辺の集合 $M=\{e_1,\cdots,e_N\}$ で表現される．グラフのすべての頂点がマッチングに加わっているとき，マッチングは**完全**であると言う．ダイマー模型では完全マッチング $M=\{e_1,\cdots,e_N\}$ の各辺 e_i をダイマーが置かれた場所と解釈することになる（図 2）．その前提として，ダイマー模型を考える 2 部グラフ G では白頂点と黒頂点が同数個なければならない．

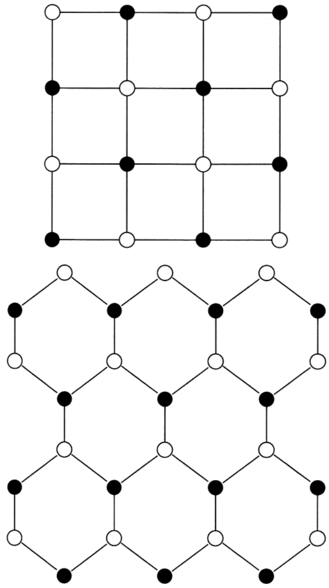


図 1　2 部グラフとしての平方格子と 6 角格子.

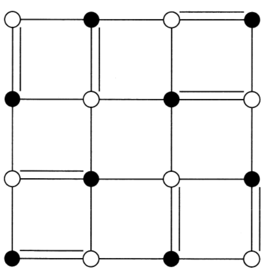


図 2　ダイマー配置の例(2 重線がダイマーを表す).

ダイマー模型では与えられた 2 部グラフ G の上のダイマー配置全体の集合 $\mathcal{M}$ を以下のようにして統計力学の**正準集団**と見なす．まず G の各辺 e に重み $W(e) \geq 0$ を指定しておく．それからダイマー配置 M の重みが

$$W(M) = \prod_{e \in M} W(e),$$

すなわち M に属する辺の重みの総積として定まる．これを**ボルツマン重み**（$-\log W(M)$ が M の**エネルギー**に相当する）として，$\mathcal{M}$ における M の確率 $\mathbb{P}(M)$ を

$$\mathbb{P}(M) = \frac{W(M)}{Z}$$

で定める．分母の Z は**分配函数**

$$Z = \sum_{M \in \mathcal{M}} W(M)$$

である．**相関函数**に相当するのは，指定された辺の集合 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k$ をダイマーとして含むようなダイマー配置全体の確率

$$\begin{aligned} C(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k) &= \mathbb{P}[\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k \in M] \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_k \in M} W(M) \end{aligned}$$

である．

統計力学の他の模型と同様に，ダイマー模型においても，分配函数や相関函数を求めることや，系のサイズが無限に大きくなる極限（**熱力学的極限**）を調べることが問題になる．カステレインは平方格子グラフの上のダイマー模型の分配函数を線形代数的な方法で求めた[6]．さらに，一般の**平面的な**（すなわち平面上で辺が交差しないように描ける）2 部グラフのダイマー模型にも同様の線形代数的構造があることを示した[7]．しかしながら，それに基づいて分配函数を具体的に求めて熱力学的極限を論じることは平方格子グラフ以外ではできなかった．ケニオンとオクニコフはカステレインの線形代数的な方法を踏襲しつつ，シェフィールドとともにこの問題に対して別の方向（トーラス上のダイマー模型）から接近して，熱力学的極限について特定の 2 部グラフに限定されない結論を引き出した[1]．それについてはこの記事の後半で紹介する．その前に，ダイマー模型と関わりの深い「タイル張り」の問題に寄り道しておこう．

3. タイル張りとの関係

狭い意味でのダイマー模型は上に説明した統計力学的正準集団を意味する．もっと広い意味でダイマー配置に関わる問題全般をここではダイマー問題と呼ぼう．そのようなダイマー問題と密接に関連しているのがタイル張りである．これもまたダイマー模型の隠れた幾何学的側面の一つと言えるだろう．

タイル張りの問題では平面上の基本的な図形を「タイル」に指定して，それらを隙間なく境界を接して並べることを考える．最近ではある種のゲージ理論の研究の中でタイル張りとダイマー配置の

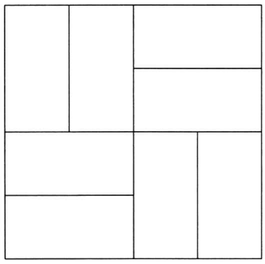
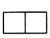
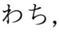
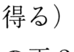


図 3　図 2 に対応するドミノ並べ.

関係が論じられている[8)]（そこにはミラー対称性や超幾何方程式の幾何学も関わっている[9)]）が，そのような高度の方法を使わなくても理解できる古典的な例として「ドミノ並べ」と「ひし形タイル張り」がある.

ドミノ並べは正方形をチェス盤のように規則的に並べた領域 Ω の中に 2 個の正方形からなるドミノ （縦横どちらの向きも取り得る）を背景の正方形に合わせて並べるものである. Ω 内の正方形の重心全体を頂点集合として，隣接する正方形の重心を辺で結べば，Ω 内の平方格子グラフ G が得られる. これが 2 部グラフになる場合を考える（図 1 に示したのはその一例である). この場合の頂点の色塗りはチェス盤の色塗りと同じである. ドミノ並べはこの G の上のダイマー配置に他ならない（図 3).

このように，ドミノ並べは平方格子グラフの上のダイマー配置そのものである. ドミノ並べは見かけの単純さからは想像もつかない奥深い内容をもつ（例えば**極円定理**[10)]とその証明).

ひし形タイル張りでは 3 次元空間内の単位立方体を $(1,1,1)$ の方向から眺めた（すなわち，それに垂直な平面へ射影した）ときに見える 3 種類のひし形をタイルに用いる（図 4). このひし形を短いほうの対角線で切れば，2 個の正 3 角形に分かれる. ひし形タイル張りはこの正 3 角形対  によるドミノ並べの変種と見なせる. すなわち，平面全体に正 3 角形からなる格子を描き，それらの正 3 角形の一部からなる領域 Ω においてひし形 （互いに 120 度をなす 3 通りの方向を取り得る）によるタイル張りを考えるのである. Ω 内の正 3 角形の重心全体を頂点集合として，隣接する正 3 角形の重心を辺で結べば，Ω 内の 6 角格子グラフ G が得られる. これが 2 部グラフになる場合を考える（図 1 に示したのはその一例である). ひし形タイル張りはこの G の上のダイマー配置に他ならない（図 5).

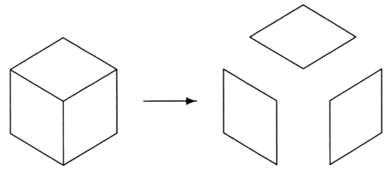


図 4　立方体の射影に現れるひし形.

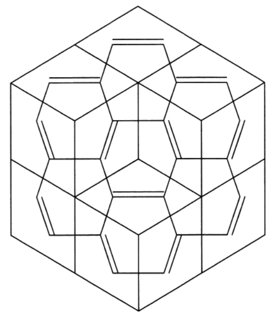


図 5　ひし形タイル張りを表すダイマー配置.

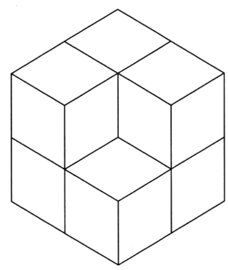


図 6　図 5 に対応する立方体積み上げ.

興味深いことに，ひし形タイル張り（言い換えれば 6 角格子グラフの上のダイマー問題）は同じ大きさの立方体を多数積み上げてできる立体図形の表面の形状としても解釈できる. その関係は図を描いてみれば直ちに納得できるだろう. 実際，すでに述べたように，3 種類のタイルは単位立方体を $(1,1,1)$ の方向から眺めたときに見える面に他ならないので，それらが並んだタイル張りは人間の目には自然に立体の表面に見えるのである（図 6).

このような立体図形の表面の形状を確率論・統計力学的に扱うことは**ランダム曲面**の問題の一種として昔から研究されていた. ケニオンとオクニ

コフはダイマー模型について一連の共同研究を行う前に，いずれも**3次元ヤング図形**の問題に取り組んでいた．その結果に密接な関連があることに気がついて共同研究に入ったようである[4]．3次元ヤング図形は通常のヤング図形の3次元版であり，ヤング図形では平面の第1象限に正方形を並べるのに対して，3次元ヤング図形では3次元空間の第1象限に立方体を並べる．3次元ヤング図形は数学者マクマホンによる20世紀初頭の先駆的研究によって組合せ論の研究対象となったが，1980年代から90年代にかけて**交代符号行列予想**と呼ばれる予想の解決過程において改めて注目を集めた[11]．それから10年あまり後，オクニコフはケニオンとともにひし形タイル張りのダイマー的解釈を追求する一方で，数学者のレシェティヒン，物理学者のヴァファとともに3次元ヤング図形の統計力学的模型と位相的弦理論との隠れた関係を明らかにした[12]．ひし形タイル張りはこのようにドミノ並べ以上に奥深い内容をもつのである．

4. ダイマー模型の可解性

カステレインは2部グラフの**隣接行列**を辺の重みと符号因子によって修正した行列 K（今日**カステレイン行列**と呼ばれる）を導入して，平面的な2部グラフの場合にはダイマー模型の分配函数が

$$Z = |\det K| \tag{1}$$

という形に表せることを示した．その要点を説明しよう．2部グラフ G の白頂点全体の集合を $W = \{w_1, \cdots, w_N\}$，黒頂点全体の集合を $B = \{b_1, \cdots, b_N\}$，辺全体の集合を E で表すとき，カステレイン行列 K は W を行の添え字集合，B を列の添え字集合とする $N \times N$ 行列であり，(w, b) 要素 K_{wb}（$w \in W, b \in B$）は

$$K_{wb} = \begin{cases} \pm W(w,b) & ((w,b) \in E \text{ のとき}), \\ 0 & ((w,b) \notin E \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義される．符号因子 $\pm$ を入れたのがカステ

レインの工夫である．この行列の行列式の展開

$$\det K = \sum_{\sigma\in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) K_{w_1 b_{\sigma(1)}} \cdots K_{w_N b_{\sigma(N)}}$$

において 0 でない項は G 上のダイマー配置 M にちょうど 1 対 1 対応していて，その絶対値は M の重み $W(M)$ に等しい．G が平面的であれば，K_{wb} の符号をうまく選ぶこと（選び方は一通りではない）によって，これらの 0 でない項はすべて同じ符号をとる（結果として行列式は符号を除いて分配函数に等しい），ということをカステレインはグラフ理論的考察によって示したのである．例えば 6 角格子グラフの場合にはこの符号因子はすべて $+1$ でよいことがわかる．

こうして分配函数を求める問題はカステレイン行列の行列式を求める問題に帰着する．ここでは説明を省くが，実は相関函数もカステレイン行列の小行列式（一般化余因子）を用いて表せることが知られている．これらは平面 2 部グラフ上のダイマー模型が一種の**可解模型**であることを意味する．この可解性はヤン・バクスター方程式に基づいて説明される 2 次元格子模型や 1 次元量子スピン系の可解性とは異質で，古くから知られたイジング模型の可解性に似ている．

問題が線形代数に帰着するとはいっても，行列式の値を求めることは一般には易しい問題ではない．しかしながら，2 部グラフの特殊性を利用してそれが実行できる場合もある．実際，カステレインは $2m \times 2n$ の平方格子グラフの横方向の辺に重み a，縦方向の辺に重み b を与えた場合において，グラフの直積構造を利用して K の対角化を行って，分配函数 $Z = Z_{2m,2n}$ に対して

$$Z_{2m,2n} = \prod_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \left(4a^2 \cos^2 \frac{j\pi}{2m+1} + 4b^2 \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

という表示を与えた．この表示から熱力学的極限 $m, n \to \infty$ における**自由エネルギー**

$$F = -\lim_{m,n\to\infty} \frac{\log Z_{2m,2n}}{4mn}$$

に対して

$$F = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\tau \log(4a^2 \cos^2\theta + 4b^2 \cos^2\tau)$$

という積分表示が得られる．

この積分表示から**対数的マーラー測度**と呼ばれる量との関係がわかる．実際，積分変数を $z = e^{2i\theta}$, $w = e^{2i\tau}$ と変数変換すれば，この積分表示は

$$F = -\oint \frac{dz}{2\pi i z} \oint \frac{dw}{2\pi i w} \log |P(z,w)| \quad (2)$$

という周回積分の形になる．ここで積分路は単位円周 $|z| = 1$, $|w| = 1$ である．また，$P(z,w)$ は

$$P(z,w) = a^2(z + z^{-1} - 2) + b^2(w + w^{-1} - 2)$$

という $z^{\pm}, w^{\pm}$ の多項式，すなわちローラン多項式である．(2) の右辺の周回積分がこのローラン多項式の対数的マーラー測度に他ならない．対数的マーラー測度はもともと数論や代数幾何学で研究されていたものである．それがこのような場所にも登場するのは驚くべきことであろう．

マーラー測度は定数でない任意のローラン多項式に対しても意味をもつので，ここに現れた $P(z,w)$ の正体が気になるが，その答はケニオン・オクニコフ・シェフィールドの研究[1)] によって明らかになった．彼らは平面ではなくてトーラスの上のダイマー模型から出発し，トーラスの縦横の周期を n 倍にして $n \to \infty$ とすることによって熱力学的極限を実現した．そして巧妙な論法によって，平方格子グラフ以外の場合も自由エネルギーのマーラー測度表示 (2) が成立することを示した．そこに現れるローラン多項式 $P(z,w)$ は周期を n 倍する前のトーラスのダイマー模型に対するカステレイン行列 $K(z,w)$ の行列式，すなわち

$$P(z,w) = \det K(z,w)$$

である．ケニオンたちはこれを**特性多項式**，それが定める複素代数曲線

$$\Gamma = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z,w) = 0\}$$

を**スペクトル曲線**と呼んだ．$K(z,w)$ の定義は平面グラフの場合とほぼ同じであるが，トーラスの基本領域の境界にまたがる辺 (w,b) に対する行列

要素 $K_{wb}(z,w)$ には新たに $z^{\pm 1}$ あるいは $w^{\pm 1}$ を乗じてある（いずれを乗じるかは辺が境界を横切る位置と方向で決まる）ことが違う．z,w は周期的ポテンシャル問題でおなじみのブロッホ乗数に相当する．ケニオンたちはトーラスの縦横の周期を n 倍する際に $P(z,w)$ が従う漸化式に注目し，スペクトル曲線のもつ**極大性**という性質（それを示すために代数幾何学的考察が必要になる[1,2]）と組み合わせて (2) を導出している．

特に平方格子グラフと 6 角格子グラフの熱力学的極限の場合には，最小周期のトーラスとして白頂点と黒頂点を 1 個ずつ含むものが選べる．それに対する $K(z,w)$ は 1×1 行列（すなわちスカラー）であり，したがって $P(z,w) = K(z,w)$ と見なせる．その具体的な形は，平方格子グラフの場合には上で出会ったローラン多項式になり，6 角格子グラフの場合には

$$P(z,w) = az + bw + c$$

という 1 次式になる（a,b,c は辺の重みに関係する定数である）．こうしてカステレインの結果の意味とその 6 角格子グラフへの一般化が明らかになる．

5. ダイマー模型とアメーバ

最後に，ケニオン・オクニコフ・シェフィールドの研究[1]の本題であるダイマー模型とアメーバとの関係について簡単に紹介しよう．この節の内容は極めて専門的にならざるを得ないことをあらかじめお断りしておく．

まず，トーラス上のダイマー配置が平面上の 2 重周期的ダイマー配置に対応していることを注意しておきたい．トーラス上の 2 部グラフ $G = G_1$ に対して，それを基本領域内の図形とするような平面上の 2 重周期的無限 2 部グラフ $\tilde{G}$ が得られる．$\tilde{G}$ には $\mathbb{Z}^2$ が並進群として作用し，G_1 は $G_1 = \tilde{G}/\mathbb{Z}^2$ と表せる．トーラス上のダイマー配置は $\tilde{G}$ 上の周期 $(1,1)$ をもつ 2 重周期的ダイマー配置と見なせる．これに対して縦横の周期を n 倍したトーラスの上の 2 部グラフ $G_n = \tilde{G}/n\mathbb{Z}^2$ のダイマー配置は $\tilde{G}$ 上の周期 (n,n) の 2 重周期的ダイマー配置に相当する．(2) はこのような 2 重周期的ダイマー配置の正準集団の $n \to \infty$ の極限における（単位面積あたりの）自由エネルギーを与えている．

問題をこのように平面上の無限 2 部グラフ $\tilde{G}$ に翻訳すれば，もう少し精密な問題設定も可能になる．シェフィールドは博士論文において，$\tilde{G}$ 上のダイマー配置を**平均的傾き**が (s,t) の値をとるものに制限した場合の統計力学的確率測度（正確に言えば**エルゴード的ギブス測度**）$\mu_{(s,t)}$ を論じた．この「傾き」はダイマー配置の定める**高さ函数**（$\tilde{G}$ の面集合の上で定義され，特に 6 角格子グラフの場合には，ダイマー配置に対応する立方体積み上げ図形の表面を $(1,1,1)$ 方向から眺めたときの文字通りの高さになる）のグラフの傾きを意味する．技術的に言えば，G_n 上のダイマー配置を $\tilde{G}$ 上の (n,n) 周期的ダイマー配置と見なして平均的傾きが (s,t) に近いものを拾い出し，その集団の上で G_n 上のギブス測度から決まる条件付き確率を考えれば，$n \to \infty$ の極限で $\mu_{(s,t)}$ が得られる．物理的に見れば，この $\mu_{(s,t)}$ は一様磁場 (B_x, B_y) が存在するときのダイマー模型の熱力学的極限を表す．

「アメーバ」はこの磁場の存在下のダイマー模型において「ロンキン函数」とともに登場する．ケニオンたちの結果によれば，この場合の自由エネルギーは

$$F = -R(B_x, B_y) \tag{3}$$

で与えられる．ここで $R(x,y)$ は $P(z,w)$ の**ロンキン函数**と呼ばれるもので

$$R(x,y) = \oint \frac{dz}{2\pi i z} \oint \frac{dw}{2\pi i w} \log |P(e^x z, e^y w)|$$

という周回積分で定義される．積分路はここでも単位円周 $|z| = 1, |w| = 1$ である（したがって，対数的マーラー測度はロンキン函数の特殊値 $R(0,0)$ と見なせる）．ロンキン函数は次のような性質をもつ．

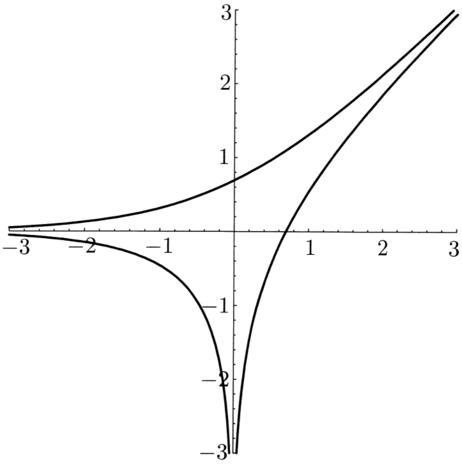


図 7 $P(z,w)=z+w+1$ のアメーバ（3 本の曲線で囲まれた部分）.

- $R(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の凸函数である.
- $R(x,y)$ は $P(z,w)$ の**アメーバ**

$$A=\{(\log|z|,\log|w|)\mid(z,w)\in\Gamma\}$$

の上で狭義凸である.

- アメーバの補集合 $\mathbb{R}^2\setminus A$ はいくつかの連結成分に分かれるが，各連結成分上では $R(x,y)$ は（連結成分ごとに異なる）1 次式になる.

ここで登場したアメーバは対数写像 $(z,w)\mapsto(\log|z|,\log|w|)$ によるスペクトル曲線 Γ の像と見てもよい．スペクトル曲線は「曲線」と言っても実はリーマン面なので，その像は一般には 2 次元的に広がる．その形状にスペクトル曲線の幾何学的性質が反映されていることは言うまでもない．例として，6 角格子グラフの特性多項式 $P(z,w)=z+w+1$ に対するアメーバを図 7 に示した．この例ではアメーバの補集合は無限遠方に広がる 3 つの連結成分からなるが，一般には有界な連結成分（アメーバの穴）も存在し得る.

磁場パラメータの空間 $\mathbb{R}^2$ はこのようにアメーバの境界によっていくつかの部分に分かれる．ケニオンたちは各領域における相関函数（これも熱力学的極限において $P(z,w)$ を用いて表せる）の挙動の違いを示して，アメーバの境界を描いた図がダイマー模型の**相図**（phase diagram）に他ならない，という重要な結論を得た.

なお，ロンキン函数は立方体積み上げ図形の**極限形状**（limit shape）の問題においても重要な意味をもっているが[3]，ここでは紙数の関係でこの話題に立ち入ることはできない.

最後になったが，本記事の執筆の機会をいただいた香取眞理氏ならびにアメーバの図を貸していただいた中津了勇氏にこの場を借りて謝意を表したい.

参考文献

1) R. Kenyon, A. Okounkov and S. Sheffield, Dimers and amoeba, *Ann. of Math.* (2) **163** (2006), 1019–1056.
2) R. Kenyon and A. Okounkov, Planar dimers and Harnack curves, *Duke Math. J.* **131** (2006), 499–524.
3) R. Kenyon and A. Okounkov, Limit shapes and complex Burgers equations, *Acta Math.* **199** (2007), 263–302.
4) R. Kenyon, Andrei Okoukov's work on the dimer model, *PIMS Magazine* vol.**10**, issue 2 (2007), pp.6–7. http://www.pims.math.ca/media/publications/magazines に入手方法の説明がある.
5) 高崎金久，ダイマー模型とその周辺，数理解析研究所講究録 **1541** (2007), pp.23–46. 誤植を訂正したものを http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki/res/kok0608.pdf として公開している.
6) P. Kasteleyn, The physics of dimers on a lattice, *Physica* **27** (1961), 1209–1225.
7) P. Kasteleyn, Graph theory and crystal physics, in "Graph Theory and Theoretical Physics" (Academics Press, 1967), pp.43–110.
8) S. Franco, A. Hanany, K.D. Kennaway, D. Vegh and B. Wecht, Brane dimers and quiver gauge theories, *JHEP* **0601** (2006), no.1, paper 096, p.48.
9) J. Sitenstra, Hypergeometric systems in two variables, quivers, dimers and dessins d'Enfants, arXiv:0711.0464 [math.AG].
10) ジョージ・アンドリュース，キムモ・エリクソン，『整数の分割』（佐藤文広訳，数学書房 2006 年）に簡単な紹介がある.
11) D.M. Bressoud, Proofs and confirmations, Cambridge University Press, 1999.
12) A. Okounkov, N. Reshetikhin and C. Vafa, Quantum Calabi-Yau and classical crystals, in: P. Etingof, V. Retakh and I.M. Singer (eds.), The unity of mathematics, *Progr. Math.* **244**, Birkhäuser, 2006, pp.597–618.

（たかさき・かねひさ，京都大学大学院人間・環境学研究科）

交代符号行列の数え上げ問題
ザイルバーガーとストロガノフ



岡田　聡一

交代符号行列がこの世に生まれてから四半世紀以上になる．この間に交代符号行列の数え上げ問題は組合せ論だけでなく数理物理学など様々な分野を巻き込みながら進展を見せてきた．その中でも大きなインパクトを与えたのが，交代符号行列の総数に関する交代符号行列予想を最初に解決した（そしてクーパーバーグによる別証明を引き出した）ザイルバーガーと，特別な XXZ スピン鎖の基底状態ベクトルに交代符号行列の個数を見出した（そして一連のラズモフ–ストロガノフ型予想のきっかけを与えた）ストロガノフであろう．本稿では，交代符号行列の数え上げ問題と数理物理学との関係を中心に，その発展してきた様子を解説しよう．（対称性を課したり境界条件を変えたりすることで様々なバリエーションが現れるが，ここでは最も単純な場合に焦点を絞る．）

■ 1. 交代符号行列 ■

1980 年代初頭にロビンズ–ラムゼー[12]は，行列式を計算するドジソン[*1]のアルゴリズム（行列式の縮約）に関する研究の中から，置換行列（0, 1 を成分とする正方行列で，各行，各列に 1 が 1 個ずつ現れるもの）の一般化[*2]として交代符号行列を導入した．

正方行列は，次の 3 つの条件をみたすとき，**交代符号行列**（alternating sign matrix）であると言う：

- 各成分は 1, 0, -1 のいずれかである．
- 各行，各列の成分の和は 1 に等しい．
- 各行，各列において 0 を無視すると 1 と -1 が交互に現れる．

n 次交代符号行列全体のなす集合を $\mathcal{A}_n$ と表す．例えば，図 1 の左端の 6 次正方行列は交代符号行列である．もし交代符号行列 A が -1 を成分にもたなければ，行和，列和に関する条件より A の各行，各列には 1 が 1 個ずつしか現れないから，A は置換行列である．3 次の交代符号行列は，

$$\mathcal{A}_3 = \left\{ \begin{matrix} 6\text{ 個の} \\ \text{置換行列} \end{matrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

のように，合計 7 個である．

ミルズ–ロビンズ–ラムゼー[8]は，n 次の交代符号行列の個数[*3]が

$$\# \mathcal{A}_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!}{(n+k)!} \tag{1}$$

で与えられることを予想した．n が小さいときは，

n	1	2	3	4	5	6
$\#\mathcal{A}_n$	1	2	7	42	429	7436

*1）『不思議の国のアリス』，『鏡の国のアリス』を著したルイス・キャロルとして知られている．

*2）ワイルの分母公式やブリューアー順序の点でも，交代符号行列は置換行列の一般化となっている．

*3）集合 X の元の個数を $\#X$ と表す．

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 0&1&-1&1&0&0\\ 0&0&1&-1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

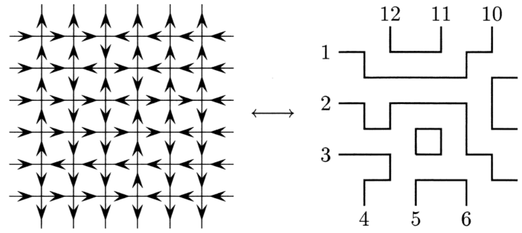


図 1　交代符号行列，6 頂点模型の状態，FPL 配置の対応．

である．この予想は，1990 年代半ばにザイルバーガー[13]，クーパーバーグ[6]によって全く異なる方法で証明された．(証明については 3 節で解説する．) この予想の提示から解決にいたる物語については，ブレスードの本[3]に関係者の写真付きで詳しく書かれている．

2. TSSCPP

本稿の隠れた主役が，完全対称な自己相補的平面分割（totally symmetric self-complementary plane partition, 以下 TSSCPP と略す）である．

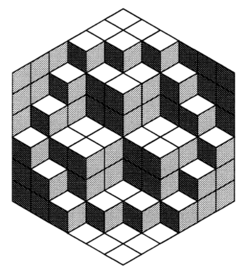
平面分割（plane partition）とは，

$$\begin{array}{cccccccc} 6&6&6&5&4&3&0&\cdots\\ 6&6&5&3&3&2&0&\cdots\\ 6&5&5&3&3&1&0&\cdots\\ 5&3&3&1&1&0&0&\cdots\\ 4&3&3&1&0&0&0&\cdots\\ 3&2&1&0&0&0&0&\cdots\\ 0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots \end{array} \qquad (2)$$

のように，非負整数を 2 次元的に並べた配列で次の 2 つの条件をみたすもののことである：

- 0 でない成分は高々有限個である．
- 各行，各列は広義単調減少である．

分割が正方形を並べたヤング図形で表されたように，平面分割も単位立方体を積み重ねた 3 次元ヤング図形で表すことができる．平面分割 π の **3 次元ヤング図形**とは，π において数字 k の書かれているところに k 個の立方体を積み重ねてできるものである．例えば，(2) の平面分割の 3 次元ヤング図形を $(1,1,1)$ の方向から見ると，


(3)

のように見える．これは，単位**ひし形**（1 辺の長さが 1 の正三角形を 2 つ合わせたもの）**によるタイル張り**（rhombus tiling, lozenge tiling）と見ることもできる．このようにして，平面分割とひし形によるタイル張りとが 1 対 1 に対応することになる．

完全対称な自己相補的平面分割とは，最も高い対称性をもつ平面分割のことである．正整数 n を固定して，1 辺の長さ $2n$ の立方体の中に 3 次元ヤング図形が含まれるような平面分割，つまり，1 辺の長さ $2n$ の正六角形のひし形によるタイル張りを考えると，これらには正六角形の対称性の群（位数 12 の正二面体群）が作用している．この作用で固定される平面分割（つまり，対応するタイル張りが 60° 回転しても，対角線に関して折り返しても変わらないもの）が，n 次の**完全対称な自己相補的平面分割**（**TSSCPP**）である．例えば，(3) のタイル張りは正六角形の対称性の群で不変だから，(2) の平面分割は 3 次の TSSCPP である．n 次の TSSCPP 全体のなす集合を $\mathcal{T}_n$ と表す．

ミルズ–ロビンズ–ラムゼー[9]は，n 次 TSSCPP の個数が n 次交代符号行列の個数と等しいことを予想し，いくつかの状況証拠（精密化）となる予想とともに次の問題を提起している．

問題　$\mathcal{A}_n$ と $\mathcal{T}_n$ の間に全単射を構成せよ．

n 次 TSSCPP の個数については，アンドリュース[1)] が，$\sum_{r=2i-j+1}^{2j-i}\binom{i+j}{r}$ を成分とする反対称行列のパフィアンを計算することにより，

$$\#\mathcal{T}_n=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(3k+1)!}{(n+k)!} \qquad (4)$$

となることを証明している．しかし，$\mathcal{A}_n$ と $\mathcal{T}_n$ の間の全単射は依然として見つかっていない．

3. 交代符号行列予想の証明

交代符号行列の個数に関する予想 (1) は，ザイルバーガー[13)]とクーパーバーグ[6)]によって独立に証明された．

ザイルバーガーの証明（70 ページにもわたる[*4)]）は，交代符号行列の個数 $\#\mathcal{A}_n$ と TSSCPP の個数 $\#\mathcal{T}_n$ のそれぞれを有理関数の定数項（留数）として表し，両者が等しいことを巧妙な式変形によって示すというものである．これによって，$\#\mathcal{A}_n=\#\mathcal{T}_n$ となるので，アンドリュースの結果 (4) と合わせると，(1) が証明されたというわけである．

一方，クーパーバーグの論文[6)] は 12 ページと簡潔なものであり，交代符号行列と，**領域壁境界条件をもつ 6 頂点模型**（six vertex model with domain wall boundary conditions）の状態の間に 1 対 1 対応があることを利用して，(1) を直接証明している．この節では，この証明の概略を紹介する．

n 本の横線と n 本の縦線からなる格子状のグラフ（図 1 の中央の図から矢印を除いたもの）を考え，i 番目の横線と j 番目の縦線が交わってできる頂点を (i,j) と名づける．このグラフの各辺に，次の 2 つの条件をみたすように矢印を配置することを考える：

- 左端，右端の辺の矢印はすべて内側を向き，上端，下端の辺の矢印はすべて外側を向いている．
- 端点以外の各頂点において，4 つの辺の矢印のうちその頂点に向かう矢印は 2 本である．つまり，許される配置は表 1 の 1 行目の 6 通りの配置のみである．

これらの条件をみたす矢印配置全体のなす集合を $\mathcal{C}_n$ とする．例えば，図 1 の中央の図の矢印配置はこの 2 条件をみたしている．このような矢印配置が与えられたとき，端点以外の各頂点に表 1 の 1 行目，2 行目の対応規則に基づいて 1, −1, 0 を置いて n 次正方行列を作ると，交代符号行列ができる．そして，この対応は $\mathcal{C}_n$ と $\mathcal{A}_n$ の間の全単射を与える．

実はこのような領域壁境界条件をもつ 6 頂点模型は以前から研究されており，その分配関数の行列式表示もイゼルギン–コレピンによって与えられていた．n 本の横線，縦線のそれぞれにスペクトルパラメーター $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$ を割り当てるとき，**分配関数**（partition function）[*5)] $A_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};a)$ は，

$$A_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};a)=\frac{1}{(a-1/a)^{n^2-n}(a^2-1/a^2)^n}\times\sum_{C\in\mathcal{C}_n}\prod_{i,j=1}^{n}W\left(C_{ij}\;\middle|\;\frac{x_i}{y_j};a\right)$$

によって定義される．ここで，各頂点での重み $W(C_{ij}|x_i/y_j;a)$ は，頂点 (i,j) の周りの矢印の配置 C_{ij} に応じて表 1 の 1 行目，3 行目の対応規則で与えられるものである．このとき，交代符号行列と矢印配置との間の対応から，交代符号行列の個数は

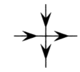
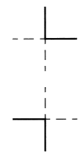
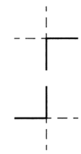
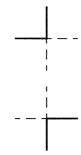
$$\#\mathcal{A}_n=A_n((1,\cdots,1),(1,\cdots,1);e^{\pi\sqrt{-1}/3}) \qquad (5)$$

と，$a=e^{\pi\sqrt{-1}/3}$ における分配関数においてスペクトルパラメーターをすべて 1 に特殊化したものに等しい．ところが，イゼルギン–コレピンによる分配関数の行列式表示を用いると，$a=e^{\pi\sqrt{-1}/3}$ における分配関数そのものが，シューア関数（一

*4)　ザイルバーガーの論文[13)] がなぜあのような独特な形の論文になったのかという理由は，ロビンズに奉げた追悼論文[14)] のあとがきに書かれている．

*5)　交代符号行列の数え上げに合うように，定数倍を調整している．

表 1　矢印の配置，交代符号行列の成分，ボルツマン重み，FPL.

矢印の配置						
交代符号行列の成分	1	−1	0	0	0	0
ボルツマン重み $W(-\|z;a)$	$a^2-\frac{1}{a^2}$	$a^2-\frac{1}{a^2}$	$\frac{a}{z}-\frac{z}{a}$	$\frac{a}{z}-\frac{z}{a}$	$az-\frac{1}{az}$	$az-\frac{1}{az}$
FPL						

般線型群や対称群の表現論などに現れる由緒正しい対称式）を用いて次のように表される*6)ことが示される．

定理 1（岡田[10)]）

$$A_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};e^{\pi\sqrt{-1}/3}) = \frac{1}{3^{n(n-1)/2}\prod_{i=1}^{n} x_i^{n-1}y_i^{n-1}} s_{\lambda(n)}(\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{y}^2).$$

ここで，$\boldsymbol{x}^2=(x_1^2,\cdots,x_n^2)$, $\boldsymbol{y}^2=(y_1^2,\cdots,y_n^2)$ であり，シューア関数を指定する分割は

$$\lambda(n)=(n-1,n-1,n-2,n-2,\cdots,2,2,1,1,0,0)$$

で与えられる．

シューア関数の変数をすべて 1 に特殊化したときの値は，例えばワイルの次元公式などによって求めることができ，定理 1 と (5) から交代符号行列予想 (1) が証明される．（クーパーバーグ[6)]は，スペクトルパラメーターを q べきに特殊化したものを用いて，イゼルギン–コレピンの行列式から直接 (1) を証明している．）

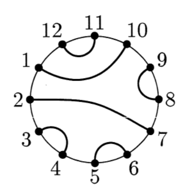
このようにして数理物理学の力を借りて交代符号行列予想は見通しよく証明できたが，なぜシューア関数が現れるのか，なぜ特別な形の分割 $\lambda(n)$ が現れるのかなど，謎は尽きない．

*6)　分配関数 $A_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};a)$ が定理 1 のように $2n$ 個のスペクトルパラメーターに関して対称となるのは，$a=e^{\pi\sqrt{-1}/3}$ という特殊事情のおかげである．

4. ラズモフ–ストロガノフ予想

クーパーバーグの第 2 の論文[7)]などによって，対称性をもつ交代符号行列の数え上げ問題*7)がほぼ収束に向かいつつあった一方で，意外なところに交代符号行列が現れた．いわゆるラズモフ–ストロガノフ予想である．

円周上に等間隔に配置された $2n$ 個の点（反時計回りに $1,2,\cdots,2n$ と番号をつける）を，2 点ずつ円内部の互いに交わらない弧を用いて結んでできる図式を n 次の**リンクパターン**（link pattern）と呼ぶ．（どの点とどの点が結ばれているかだけに着目する．）n 次のリンクパターン全体のなす集合を $\mathcal{L}_n$ と表す．例えば，

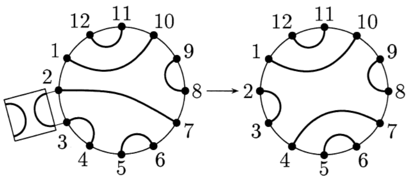
$\pi =$  (6)

は 6 次のリンクパターンである．n 次のリンクパターンの個数は，$\#\mathcal{L}_n=(2n)!/n!(n+1)!$（カタラン数）で与えられる．

n 次のリンクパターンを基底とする線型空間を V_n とおき，$\pi\in\mathcal{L}_n$ に対応する基底を $|\pi\rangle\in V_n$ と表すことにする．V_n 上の線型変換 e_i $(1\le i\le$

*7)　対称性をもつ交代符号行列の個数に関する予想で現在も未解決なのは，主対角線と反対角線の両方に関して対称な交代符号行列の場合である．

$2n$) を次のように定義する[*8)]．$\pi \in \mathcal{L}_n$ が与えられたとき，2 点 i と $i+1$ ($i=2n$ のときは $2n+1 \equiv 1$ と同一視する) の位置に  をつけてできるリンクパターンを π' とするとき，$e_i|\pi\rangle = |\pi'\rangle$ と定める．例えば，(6) のリンクパターン π に e_2 を施すと，



のようになる．また，同じ π に e_3 を施すとループができるが，今の場合できたループは 1 で置き換えるので，$e_3|\pi\rangle = |\pi\rangle$ となる．

上で定義した e_i を用いて，V_n 上の線型変換（**ハミルトニアン**と呼ぶ）H_n を

$$H_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n}$$

とおいて定める．すると，ペロン–フロベニウスの定理[*9)]から，H_n の固有値 $2n$ をもつ固有ベクトルがスカラー倍を除いて一意的に定まることがわかる．実は，この固有ベクトルの成分が，交代符号行列の数え上げで与えられるというのが，ラズモフ–ストロガノフ予想である．

予想の主張を述べるために，交代符号行列と密に詰め込まれたループの配置が 1 対 1 に対応することを利用して，交代符号行列をリンクパターンで分類する．

n 本の横線と n 本の縦線からなる格子状のグラフ（6 頂点模型の元になったグラフ）において次の 2 つの条件をみたすように辺を選んだものを，n 次の**密に詰め込まれたループ** (fully packed loop, **FPL** と略す) の配置と呼ぶ：

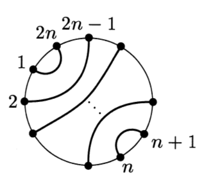
- 端の辺は，左端の一番上の辺から一つおきに選ぶ．
- 端点以外の頂点では，それにつながる 4 本の辺から 2 本を選ぶ．

このような n 次 FPL 配置全体のなす集合を $\mathcal{F}_n$ と表す．

交代符号行列 A が与えられたとき，対応する 6 頂点模型における矢印配置を用いて，次のように辺を選んで FPL 配置を作る．頂点 (i,j) では，その周りの矢印の配置に応じて，表 1 の 1 行目，4 行目の対応規則に従って，4 行目の上段（$i+j$ が偶数のとき）あるいは下段（$i+j$ が奇数のとき）のように 2 本の辺を選び出す．例えば，図 1 の左端の交代符号行列には右端の FPL 配置が対応する．この対応は $\mathcal{A}_n$ と $\mathcal{F}_n$ の間の全単射を与えている．

n 次交代符号行列 A に対応する FPL 配置において，端点がどのように結ばれているかに注目すると，n 次のリンクパターンが得られる．このリンクパターンを A に付随するリンクパターンと呼ぶことにする．例えば，図 1 の左端の交代符号行列に付随するリンクパターンは，(6) である．

リンクパターン $\pi \in \mathcal{L}_n$ が与えられたとき，付随するリンクパターンが π である交代符号行列全体のなす集合を $A_n(\pi)$ と表す．例えば，1 と $2n$，2 と $2n-1, \cdots, n$ と $n+1$ を結んでできるリンクパターンを

$\pi_0 =$ 

とすると，$A_n(\pi_0) = \{E_n\}$（単位行列）である．

予想（ラズモフ–ストロガノフ予想[11)]） $\Psi_n = \sum_{\pi \in \mathcal{L}_n} \Psi_{n,\pi}|\pi\rangle$ を，H_n の固有値 $2n$ をもつ固有ベクトルで，$\Psi_{n,\pi_0} = 1$ となるものとする．このとき，成分 $\Psi_{n,\pi}$ はリンクパターン π を指定した交代符号行列の個数で与えられる：

$$\Psi_{n,\pi} = \#A_n(\pi) \quad (\pi \in \mathcal{L}_n). \qquad (7)$$

*8） これらの e_i たちは，$e_i^2 = e_i$, $e_i e_{i+1} e_i = e_i$ などのテンパリー–リーブ代数の関係式をみたす．

*9） A を非負実数を成分とする正方行列とし，A^N の成分がすべて正となるような正整数 N が存在すると仮定する．このとき，A の実固有値 $\alpha > 0$ で，α 以外の A の固有値の絶対値は α を超えないものが存在する．さらに，α に対応する A の固有空間は 1 次元であり，その固有ベクトルの成分はすべて正であるか，すべて負であるかのいずれかである．

特に，

$$\sum_{\pi\in\mathcal{L}_n}\Psi_{n,\pi}=\#A_n. \tag{8}$$

この予想のうち (8) は，バチェラーたち[2]によって予想されていた部分であり，**総和法則** (sum rule) とも呼ばれる．

5. 非斉次ループモデル

ラズモフ–ストロガノフ予想 (7) はまだ証明されていないが，総和法則 (8) はディフランチェスコ–チンジャスティン[4]によって非斉次ループモデルを利用して以下のように証明されている．この節では，

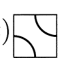
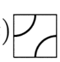
$$q=-e^{\pi\sqrt{-1}/3}$$

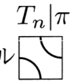
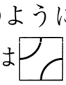
とする．

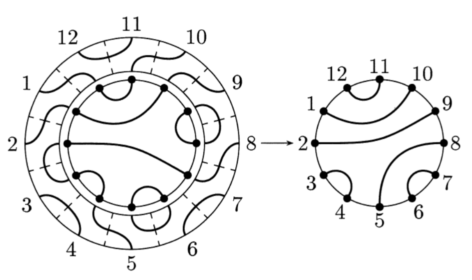
パラメーター t, $\boldsymbol{z}=(z_1,\cdots,z_{2n})$ を用意し，

$$p(x,y)=\frac{qx-q^{-1}y}{qy-q^{-1}x},\quad p'(x,y)=\frac{x-y}{qy-q^{-1}x}$$

とおく．リンクパターンを基底とする線型空間 V_n 上の線型変換（**転送行列**と呼ぶ）$T_n=T_n(t;\boldsymbol{z})$ を

$$T_n=\prod_{i=1}^{2n}\left(p(z_i,t)\right.$$  $$+p'(z_i,t)$$  $$\left.\right)$$

によって定義する．つまり，$\pi\in\mathcal{L}_n$ が与えられたとき，$T_n|\pi\rangle$ は次のように定まる．各 i に対してタイルあるいはのいずれかを選び上辺を内側にして円環上に並べ，



のように，リンクパターン π の外側につけると，新たなリンクパターンが得られる．（ただし，ループができるごとに $\tau=1$ で置き換える．）このようにして得られるものたちの線型結合（係数は対応する $p(z_i,t)$ あるいは $p'(z_i,t)$ の積）を作ったものが $T_n|\pi\rangle$ である．

$q=-e^{\pi\sqrt{-1}/3}$ のとき，$p(z_i,t)+p'(z_i,t)=1$ だから，T_n は固有値 1 をもつことがわかる．また，$z_i=te^{-\theta_i\sqrt{-1}}$, $0<\theta_i<2\pi/3$ のとき，$0<p(z_i,t)<1$ となり，ペロン–フロベニウスの定理を適用することができる．よって，$T_n(t;\boldsymbol{z})$ の固有値 1 をもつ固有ベクトル $P_n=P_n(t;\boldsymbol{z})=\sum_{\pi\in\mathcal{L}_n}P_{n,\pi}|\pi\rangle$ で，$\sum_{\pi\in\mathcal{L}_n}P_{n,\pi}=1$ となるものがただ 1 つ存在する．

ヤン–バクスター関係式を用いると，$\boldsymbol{z}$ を固定したときの転送行列 $T(t;\boldsymbol{z})$, $T(t';\boldsymbol{z})$ が可換であることがわかり，固有ベクトル $P_n(t;\boldsymbol{z})$ が t に依らないことが導かれる．また，R 行列を

$$\check{R}_{i,i+1}(z,w)=p(z,w)\,\mathrm{Id}+p'(z,w)e_i$$

とおいて定めると，$1\le i\le 2n-1$ のとき，ヤン–バクスター関係式から

$$\begin{aligned}&\check{R}_{i,i+1}(z_{i+1},z_i)P_n(\cdots,z_i,z_{i+1},\cdots)\\&=P_n(\cdots,z_{i+1},z_i,\cdots)\end{aligned} \tag{9}$$

となる．さらに，リンクパターンを 1 コマ（つまり $(180/n)^\circ$）反時計回りに回転させることによって得られる V_n 上の線型変換を ρ と表すと，

$$\rho P_n(z_2,\cdots,z_{2n},z_1)=P_n(z_1,\cdots,z_{2n}) \tag{10}$$

となる．ディフランチェスコ–チンジャスティン[4]は，この 2 つの関係式 (9), (10) を用いて，6 頂点模型の分配関数 $A_n(\boldsymbol{z};e^{\pi\sqrt{-1}/3})$ を特徴付ける関係式と同様の関係式が成り立つことを示すことにより，次の定理を証明した．

定理 2 $\Psi_n(\boldsymbol{z})=\sum_{\pi\in\mathcal{L}_n}\Psi_{n,\pi}(\boldsymbol{z})|\pi\rangle$ を，$T_n(t;\boldsymbol{z})$ の固有値 1 をもつ固有ベクトルで，

$$\Psi_{n,\pi_0}(\boldsymbol{z})=\prod\frac{qz_i-q^{-1}z_j}{q-q^{-1}} \tag{11}$$

（積は $1\le i<j\le n$ または $n+1\le i<j\le 2n$ をみたす i,j にわたる）となるものとするとき，

その成分の和は領域壁境界条件をもつ 6 頂点模型の分配関数に一致する：

$$\sum_{\pi\in\mathcal{L}_n}\Psi_{n,\pi}(\boldsymbol{z}^2)=\prod_{i=1}^{2n} z_i^{n-1}\cdot A_n(\boldsymbol{z};e^{\pi\sqrt{-1}/3}).$$

この定理において，斉次極限 $z_1=\cdots=z_{2n}=1$ をとると，総和法則 (8) が得られる．つまり，$t=1-\varepsilon$ とおき，$T_n\Psi_n=\Psi_n$ の両辺において ε の 1 次の項を取り出すと，

$$H_n\Psi_n(1,\cdots,1)=2n\Psi_n(1,\cdots,1)$$

となり，(5) と合わせることにより，(8) が導かれる．

■ 6. *q*KZ 方程式と TSSCPP の母関数 ■

定理 2 の証明で用いられた関係式 (9), (10) は，実はレベル 1 の量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ に付随した **qKZ 方程式**（量子クニズニク–ザモロジコフ方程式）において，$q=-e^{\pi\sqrt{-1}/3}$ としたものに他ならない．一般の q に対する qKZ 方程式は，

$$\begin{cases} \check{R}_{i,i+1}(z_{i+1},z_i)\Psi(\cdots,z_i,z_{i+1},\cdots) \\ =\Psi(\cdots,z_{i+1},z_i,\cdots) \quad (1\le i\le 2n-1), \\ \rho\Psi(z_2,\cdots,z_{2n},q^6 z_1) \\ =q^{3(n-1)}\Psi(z_1,\cdots,z_{2n}) \end{cases} \tag{12}$$

の形をしている．この方程式は，その π_0 成分 Ψ_{n,π_0} が (11)（ただし q は一般）で与えられる多項式解 Ψ_n をもつが，ディフランチェスコ–チンジャスティン[5)]は，Ψ_n の積分表示を利用して斉次極限 $\Psi_n(1,\cdots,1)$ が TSSCPP の母関数を与えることを証明している．（実は，証明の最後のステップで必要となった有理関数の留数の計算の部分は，ザイルバーガーが証明している．）

定理 3 $\Psi_n(\boldsymbol{z})=\sum_{\pi\in\mathcal{L}_n}\Psi_{n,\pi}(\boldsymbol{z})|\pi\rangle$ を qKZ 方程式 (12) の多項式解で，$\Psi_{n,\pi_0}(\boldsymbol{z})$ が (11) で与えられるものとするとき，

$$\sum_{\pi\in\mathcal{L}_n}\Psi_{n,\pi}(1,\cdots,1)$$

は $\tau=-(q+q^{-1})$ の多項式となり，TSSCPP の（対応するタイル張りにおいて基本領域に含まれるある向きのひし形の個数に関する）母関数を与える．

定理 2, 3 は，qKZ 方程式の解が一方では交代符号行列と，他方では TSSCPP と結びついていることを示している．ラズモフ–ストロガノフ予想を契機として qKZ 方程式の解という具体的なものが見つかったことで，交代符号行列と TSSCPP の間の全単射の構成に向けて一歩前進したと思われる．しかし，交代符号行列の全容（正体）の解明は今後の課題として残されている．

参考文献

1) G.E. Andrews, *J. Combin. Theory Ser. A*, **66** (1994), 28–39.
2) M.T. Batchelor, J. de Gier, and B. Nienhuis, *J. Phys. A* **34** (2001), L265–L270.
3) D.M. Bressoud, Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture, Cambridge Univ. Press, 1999.
4) P. Di Francesco and P. Zinn-Justin, *Electron. J. Combin.* **12** (2005), #R16.
5) P. Di Francesco and P. Zinn-Justin, *Theoret. and Math. Phys.* **154** (2008), 331–348.
6) G. Kuperberg, *Internat. Math. Res. Notices* (1996), 139–150.
7) G. Kuperberg, *Ann. Math.* **156** (2002), 835–866.
8) W.H. Mills, D.P. Robbins and H. Rumsey, Jr., *J. Combin. Theory Ser. A* **34** (1983), 340–359.
9) W.H. Mills, D.P. Robbins and H. Rumsey, Jr., *J. Combin. Theory Ser. A* **42** (1986), 277–292.
10) S. Okada, *J. Algebraic Combin.* **23** (2006), 43–69.
11) A.V. Razumov and Y.G. Stroganov, *Theoret. and Math. Phys.* **138** (2004), 333–337.
12) D.P. Robbins and H. Rumsey, Jr., *Adv. Math.* **62** (1986), 169–184.
13) D. Zeilberger, *Electron. J. Combin.* **3** (2) (1996), #R13.
14) D. Zeilberger, *Adv. in Appl. Math.* **34** (2005), 939–954.

（おかだ・そういち，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

大偏差原理と数理物理学
ヴァラダン

千 代 延　大 造

1. はじめに

本稿は，確率論の重要な問題の一つである極限定理，とりわけ大偏差問題におけるS.R.S. Varadhan（以後，ヴァラダンとカタカナで表記する）の業績を解説することを目的とする．特に，彼の打ち立てた「大偏差原理」が，確率論や数理物理学に何をもたらしたのか，その意義を語ることができたらと思う．この特集号で内山耕平先生が解説されることになっている統計物理学（流体力学極限）における彼の仕事においても，大偏差原理の考え方が議論の根底にあるので，本稿では大偏差原理を基礎から解説していきたい．

それを始める前に，ヴァラダンという名前を初めて聞く読者のために彼についての最低限の事実を記しておこう．ヴァラダンは1940年インドのマドラス生まれの確率論学者である．1963年に高名な統計学者C.R. ラオの指導の下で学位を得ると，すぐにニューヨークのクーラン研究所に行った．数年後そこに職を得て，以後現在に至るまでクーランで活動している．40年以上にわたり，大偏差原理のみならず様々な確率論および数理物理学の諸問題に対して常にスケールの大きな枠組みを設定して影響力の強い研究を行ってきた．彼は長年に亘って世界の確率論研究者のコミュニティーの中心にあってそのメンターであり続けてきた．昨年度ノルウェイ科学アカデミーより「その確率論への基本的貢献，とりわけ大偏差に関する統一理論の創造に対して」アーベル賞を授与された．1980年代以降，日本にも何度か訪れ，日本の確率論のグループとの交流も長年に亘り続いている[1)]．

2. 大偏差の確率と大偏差原理

最初に古典的な極限定理について復習しよう．独立かつ同分布な（i.i.d.）実数値確率変数の無限列 $\{X_k\}$ を考え，その最初の n 個の算術平均を

$$\hat{S}_n = \frac{1}{n}S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

とおこう．X_i の期待値 $m = E[X_i]$ および分散 $v = V[X_i]$ が存在すると仮定する．そのとき，**大数の強法則**が成立する：$n \to \infty$ としたとき確率1で $\hat{S}_n \to m$ である．サンプル数 n が大きくなるにつれて $\hat{S}_n$ の m からの「**揺らぎ**」は（遅かれ早かれ）必ず小さくなる．この小さい揺らぎの確率法則を与えるものが**中心極限定理**である．X_i の分布とは無関係に $\sqrt{n}(\hat{S}_n - m)$ の分布は常に正規分布 $N(0,v)$ に近づく．一方，n がいくら大きくなっても，稀にではあるが，$\hat{S}_n$ が m から大きく揺らいでいることがある．そのような大きな揺らぎが起こる確率を「**大偏差の確率**（probability of large deviation）」と言う．大数の法則より n が大きくなるにつれて大偏差の確率は0に近づくが，どのような条件の下で指数オーダーでこの確率が0に近づくのかということ（大偏差問題）が

当然問題になる．自然科学のみならず社会科学においても「めったに起きないこと（rare event）」が長い時間スケールでどの程度の影響をもたらすのかを評価する必要は常に存在し，ヴァラダン以前にすでに長い研究の歴史があった．例えばこの問題に対する最も重要な貢献の一つであるH. クラメルによる1938年の研究は，保険数理における「破産問題」の分析にその動機付けがあった．

では大偏差問題に対するヴァラダンの貢献はどこにあったのだろうか．彼は実数値i.i.d.列の算術平均に対する大偏差確率を評価するというレベルを超えて抽象的な「**大偏差原理**」の概念を導入し，それの帰結としてラプラスの方法の無限次元化というべき変分原理を示した．結果として無限次元空間上の積分の漸近解析における統一的な枠組みと方法論を与えた．とりわけマルコフ過程の経験分布のエルゴード定理からの大偏差確率を量る尺度に対して深い解析を行い，多くの重要な応用を得た．ヴァラダンの与えた方法論や枠組みは，物理学や統計学のみならず数論や幾何学，ORや情報理論など数多くの分野で応用されている．その意味で大偏差問題における現代的理論を打ち立てその世界を一新したのである．

まずは1966年のヴァラダンの論文に最初に現れた大偏差原理（large deviation principle）の定義を述べよう．

定義　ポーランド位相空間 X 上の関数 $I: X \to [0,\infty) \cup \{\infty\}$ が**レート関数**であるとは I が X 上で下半連続であり，任意の $L > 0$ に対し $\{x; I(x) \leq L\}$ はコンパクト集合であることである．X 上の確率測度の族 $\{\mu_n, n \geq 1\}$ に対して**レート関数を** I **とする大偏差原理が成立する**とは，任意の閉集合 $F \subset X$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(F) \leq -\inf_{x\in F} I(x)$$

が成り立ち，かつ任意の開集合 $G \subset X$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(G) \geq -\inf_{x\in G} I(x)$$

が成り立つことである．

X として非常に一般的な設定が与えられていること，また大偏差原理の定義に位相構造が組み込まれていることに注意してほしい．その結果として理解しにくい面もあると思う．ここでは，$\mu_n(A)$ に対する指数オーダーの漸近挙動を意味しているらしい，という程度に粗っぽく了解して，しばらくやさしい確率モデルにおいて大偏差原理を満たす例を見ていくことにしよう．その後改めてこの定義の意味することを考えることにする．

3. 経験分布の大偏差原理

コイン投げのモデルを考える．$\{X_k\}$ を独立かつ同分布なベルヌーイ確率変数列であるとする．すなわちある $0 < p < 1$ に対して $P(X_k = 1) = p$, $P(X_k = 0) = q = 1 - p$ であるとしよう．このとき，$\hat{S}$ は1回投げるごとに表が出る確率が p であるコインを n 回投げて表が出る回数の頻度である．

ベルヌーイ確率変数の場合には，スターリングの公式を用いて中心極限定理を初等的に証明できることを読者の多くはご存知だろう．この公式を用いて大偏差の確率の漸近挙動も計算できる．$0 < x < 1$ である x に対して $m = [nx] + 1$ とおく．2項係数 $\binom{n}{m}$ に現れる階乗項に対してスターリングの公式 $n! = \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n (1 + o(1))$ を適用すると，$n \to \infty$ のとき $m/n \to x$ より

$$P(S_n = m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$$
$$\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n x(1-x)}} \left(\frac{p}{x}\right)^m \left(\frac{q}{1-x}\right)^{n-m}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n x(1-x)}} e^{-nH(x)}$$

である，ただし H は

$$H(x) = x \log \frac{x}{p} + (1-x) \log \frac{1-x}{q}$$

で定義される区間 $[0,1]$ 上の関数である．

ド・モアブル–ラプラスの定理は，$1/\sqrt{n}$ のオーダーの揺らぎの法則を記述するものなので，上の補題において $H(x)$ の $x = p$ の近傍での挙動の情

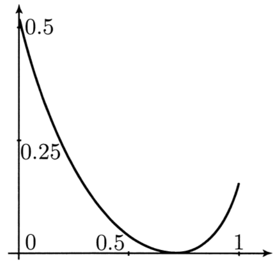


図 1 $p=0.7$ のときの $y=H(x)$ のグラフ．

報が必要である．一方大偏差の確率の評価のためには p から離れたところでの H の情報が必要になる．微分計算により H が $[0,1]$ 上非負かつ下に凸な関数であり，$H(x)=0$ である x は $x=p$ のみであることを確かめることができる（上のグラフ参照）．

今 $x>p$ と仮定すると

$$P(\hat{S}_n \geq x) = \sum_{m \geq [nx]+1} P(S_n = m)$$

の右辺に現れる $P(S_n=m)$ は考えている範囲で m について単調減少であることに注意すると

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(\hat{S}_n \geq x) = -H(x) = -\inf_{y \geq x} H(y)$$

を容易に確かめることができる．一方，p を含む任意の開区間 (α,β) に対して大数の法則により $\lim_{n\to\infty} P(\hat{S}_n \in (\alpha,\beta)) = 1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(\hat{S}_n \in (\alpha,\beta)) = 0 = -\inf_{x\in(\alpha,\beta)} H(x)$$

であることも $H(p)=0$ よりわかる．以上のような考察より，μ_n を $\hat{S}_n$ の確率分布とすると $\{\mu_n\}$ がレート関数を H とする大偏差原理をみたすことを確認することができる．

この議論は，ベルヌーイでなくても，任意の有限集合 F，例えば $F=\{1,2,\cdots,L\}$ に値をとる独立同分布の確率変数列に対しても適用することができる．そのように拡張した場合を定理の形にまとめておこう．

定理 1. $\{1,2,\cdots,L\}$ に値をとる独立同分布な確率変数列 $X_i, i\geq 1$ の分布が $P(X_i=k)=p_k, k=1,\cdots,L$ で与えられているとする．n 回の試行で各 k の値が出る頻度を

$$r_k = {}^{\#}\{i \leq n;\ X_i = k\}/n$$

とする．そのとき，単体 $X=\{(x_1,\cdots,x_L); x_k \geq 0,\ x_1+\cdots+x_L=1\}$ に値をとる確率変数ベクトル $(r_1,\cdots,r_L)$ の確率分布 μ_n に対して $H(\cdot|p)$ をレート関数とする大偏差原理が成立する．ただし，X 上の関数 $x \to H(x|p)$ は

$$H(x|p) = \sum_{k=1}^{L} x_k \log \frac{x_k}{p_k}$$

により定義される．

X の各点は $\{1,2,\cdots,L\}$ 上の確率測度である．$H(x|p)$ は確率測度 x の確率測度 p に対する**相対エントロピー**と呼ばれる量である．なお，ここで考察した頻度の列 $(r_1,\cdots,r_L)$ は，言い直せば確率変数列 $\{X_i\}$ のいわゆる**経験分布**，$k=1,\cdots,L$ に対して

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}(k),\ \text{ただし}\ \delta_x(y) = \begin{cases} 1 & (x=y) \\ 0 & (x\neq y) \end{cases}$$

である．経験分布は，いわゆる連続確率変数列に対しても定義される．その場合の大偏差問題を論じる際にはスターリングの公式は適用できない．しかし，次の節で述べるクラメルの方法を用いて大偏差原理を証明することができる．

4. クラメルの方法

ベルヌーイ確率変数列についての大偏差原理はスターリングの公式を用いて導いた．次に一般の実数値の i.i.d. $X_1, X_2, \cdots$ に対して同様の問題を考えよう．X_i の確率分布測度を μ とし，$E[X_i] = \int_{\mathbf{R}} x\mu(dx) = m$ として，先ほどと同様 $x>m$ である x に対して $P(\hat{S}_n \geq x)$ を評価する．その際，次のアイデアが非常に有効である．大数の法則からは $\lim_{n\to\infty} P(\hat{S}_n \geq x) = 0$ しか出てこない．そこで，μ を変形して平均が x になる測度 ν を作り，それを確率分布にもつ i.i.d. 列に対する大数の法則や中心極限定理を適用する．する

と，μ を ν に変形したことに応じて現れる項（μ と ν との「距離」に対応する値）が大偏差の確率を与えてくれるだろう．

このアイデアを実行してみよう．μ を変形した測度 μ_s として $\mu_s(dy) = z^{-1}e^{sy}\mu(dy)$ を考える．ただし，z は正規化定数（$z = \int_{\mathbf{R}} e^{sy}\mu(dy)$）で，実数 s は $\int_{\mathbf{R}} y\mu_s(dy) = x$ となるように決める値である．s と x の関係を具体的に記述してみよう．ここで，重要な**仮定 (A)**：

> 任意の $s \in \mathbf{R}$ に対して $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{sy}\mu(dy) < \infty.$

をおく．そのとき，

$$\psi(s) = \log \int_{\mathbf{R}} e^{sy}\mu(dy)$$

とおく．すなわち $z = e^{\psi(s)}$ である．この関数の微分をとると，

$$\psi'(s) = \frac{1}{z}\int_{\mathbf{R}} ye^{sy}\mu(dy) = \int_{\mathbf{R}} y\mu_s(dy)$$

である．μ は 1 点に退化した測度ではない（と言うまでもなく仮定している）ので，

$$\psi''(s) = \int_{\mathbf{R}} \big(y - \psi'(s)\big)^2 \mu_s(dy) > 0$$

であり，$s \to \psi'(s)$ は単調増大関数で逆関数が存在する．$s = s(x) = \psi'^{-1}(x)$ とすると

$$\mu_{s(x)}(dy) = e^{s(x)y - \psi(s(x))}\mu(dy)$$

を分布にもつ確率変数の期待値は x である．

変形する確率分布を具体的に記述できたので，これを使って $P(\hat{S}_n \geq x)$ を評価してみよう．$A_x = \{(y_1, \cdots, y_n); y_1 + \cdots + y_n \geq nx\}$ とおく．

$$P(\hat{S}_n \geq x) = \int_{A_x} 1\mu(dy_1)\cdots\mu(dy_n)$$
$$= \int_{A_x} e^{-s\sum_k y_k + n\psi(s)}\mu_s(dy_1)\cdots\mu_s(dy_n)$$
$$\sim e^{-n(sx-\psi(s))}\int_{A_x} 1\mu_s(dy_1)\cdots\mu_s(dy_n)$$

である．最後の積分は，平均 x をもつ（分布 μ_s にしたがう）i.i.d. 列に対する中心極限定理より正の定数に収束する．したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(\hat{S}_n \geq x) = -(s(x)x - \psi(s(x)))$$

が得られた．この右辺を $-I(x)$ とおこう．$s(m) = 0$ だから $I(m) = 0$ である．また $\psi'(s(x)) = x$ より $I'(x) = s(x)$ である．微分計算により，$I(x)$ が定理 1 における $H(x)$ と同様 $\mathbf{R}$ 上非負値をとる下に凸な関数であり，$I(x) = 0 \iff x = m$ であることがわかる．以上をまとめると，仮定 (A) を満たす一般の実数値確率変数列に対しても，ベルヌーイ確率変数列における定理 1 と全く同様の命題が，H を I に置き換えることにより成立することがわかった．特に，ベルヌーイの場合に $I(x) = H(x)$ である．この計算は容易なので読者は是非確認していただきたい．

実は，先ほど定義した $I(x)$ は

$$I(x) = \sup_{s\in\mathbf{R}}(s \cdot x - \psi(s))$$

という表現をもつことも容易に確かめられる．実際，$\psi'(s)$ は単調増大だから $f(s) = xs - \psi(s)$ は $\psi'(s) = x$ をみたす（唯一つの）$s = s(x)$ で最大値をとるからである．また，

$$\psi(s) = \sup_{x\in\mathbf{R}}(x \cdot s - I(x)) \tag{1}$$

も同様に成立する．特に，各 s に対して右辺の sup 内の関数は $\int y\mu_s(dy) = x$ をみたす x に対して最大値をとる（確かめよ）．

今までの議論を定理としてまとめておこう．

> **定理 2.** 仮定 (A) をみたす分布 μ を持つ独立同分布な実数値確率変数列 $X_i, i = 1, 2, \cdots$ の算術平均 $\hat{S}_n$ の確率分布を μ_n とする．そのとき，確率測度の族 $\{\mu_n\}$ に対してレート関数を
>
> $$I(x) = \sup_{s\in\mathbf{R}}(s \cdot x - \psi(s))$$
>
> とする大偏差原理が成立する．

実は，ここで紹介したクラメルの方法を用いて定理 1 もこの方法を用いて証明できる．ただし，その場合のレート関数は（定理 1 における記号に戻ると）

$$I(x) = \sup_{s \in \mathbf{R}^L} \left(s \cdot x - \log \left(\sum_{k=1}^{L} e^{s_k} p_k \right) \right)$$

である．これが $H(x|p)$ に一致することは次のようにして確かめることができる．Jensen の不等式より

$$\log \left(\sum_{k=1}^{L} e^{s_k} p_k \right) \geq \sum_{k=1}^{L} x_k \log \left(\frac{e^{s_k} p_k}{x_k} \right) = s \cdot x - H(x|p)$$

より任意の $s \in \mathbf{R}^L$ に対して

$$s \cdot x - \log \left(\sum_{k=1}^{L} e^{s_k} p_k \right) \leq H(x|p)$$

である．ところが，s を $s_k = \log \frac{x_k}{p_k}$ ととると，上の式において等号が成立することがわかる．

5. 大偏差原理と無限次元ラプラス法

以上，簡単な例をとって基本的な考え方をくどくどと説明してきた．多少大偏差原理に慣れた所で，これの意味する所を考えて見よう．まず，空間 X として極めて大きな空間をとることも許していることを強調しておく．定理 2 において実数値 i.i.d. の算術平均を考えたため $X = \mathbf{R}$ であった．一方，定理 1 の経験分布を実数値 i.i.d. の場合に考えてみると $X = \mathcal{P}(\mathbf{R})$，すなわち確率測度の空間という大きな空間となる．

次に，このように定義された大偏差原理が成立するとき，積分の族に対する漸近挙動について次の重要な**変分公式**が成立する．これは大偏差原理における最も重要な定理であり，**ヴァラダンの定理**として知られている．

定理 3. X 上の確率測度の族 $\{\mu_n, n \geq 1\}$ に対してレート関数を I とする大偏差原理が成立するものとする．そのとき，X 上の有界連続関数 Φ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_X e^{n\Phi(x)} \mu_n(dx) = \sup_{x \in X} \bigl(\Phi(x) - I(x) \bigr)$$

が成立する．

この定理は，次の公式の高次元化である．「連続関数 $f(x)$ が $x = 0$ において最小値をとりその両側で単調減少（増加）するとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_{\mathbf{R}} e^{-nf(x)} dx = -f(0) \qquad (2)$$

が成立する，さらに $f''(0)$ が存在して $f''(0) > 0$ であるとき

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-nf(x)} dx = e^{-nf(0)} \left(\frac{2\pi}{nf''(0)} \right)^{1/2} (1 + o(1))$$

が成立する．」

パラメータ n を含む積分の族の n についての漸近挙動を調べるときこのような計算に帰着させる手法を，**ラプラスの方法**と呼んでいる．式 (2) と定理 3 の変分公式の相似性に着目してほしい．変分公式において X は無限次元である場合も許している．したがって，ヴァラダンの定理はラプラスの方法を無限次元の場合まで拡張したものと言うことができる．言い換えると，大偏差原理が成立するという条件は，このような無限次元のラプラス法が適用できるための一つの十分条件であると言えるのである．$\int_X e^{n\Phi(x)} \mu_n(dx)$ という積分の族の漸近評価に「めったに起こらないこと」がどのように効いてくるかを明確に定式化したものが，大偏差原理と定理 3 の変分公式である．

以下この定理の応用として 2 つのトピックを述べる．第一の応用として，平衡系の統計力学の基礎的概念である**ギブス測度**の変分公式による特徴づけを述べてこの節を終える．$F = \{1, 2, \cdots, L\}$ とし，$\omega \in \Omega = F^{\mathbf{Z}}$ に対して $T\omega(n) = \omega(n+1)$ とする．Ω 上の関数 ϕ が局所的であるとは，ある正の整数 l があって $\phi(\omega)$ は $\{\omega(i); |i| \leq l\}$ によって決まることとする．局所的な ϕ に対して，各 n に対して

$$P_n(\omega|_{[-n,n]}) = \frac{1}{Z_{n,\phi}} \exp\Bigl(- \sum_{i=-n}^{n} \phi(T^i \omega) \Bigr)$$

として定まる $F^{[-n,n]}$ 上の確率測度の $n \to \infty$ での弱収束極限として唯一定まる T-不変測度 P_ϕ をエネルギー ϕ の**ギブス測度**と呼ぶ．$P_0 \equiv P_{\phi \equiv 0}$ は F 上の一様測度の直積である．P_0 の下で**経験**

過程

$$R_n(\omega)=\frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}\delta_{T^i\omega}\in\mathcal{P}(\Omega)$$

は大数の法則により確率 1 で P_0 に弱収束する．これに対応して，R_n の P_0 からの揺らぎに関して再び大偏差の確率を計算することができる．すなわち $X=\mathcal{P}(\Omega)$ 上の可測部分集合 A に対して $\mu(A)=P_0(R_n\in A)$ と定めると，$\{\mu_n\}$ に関して I_0 をレート関数とする大偏差原理が成立する．ただし，

$$I_0(Q)=\log L-H(Q),$$

ここで H は Kolmogorov–Sinai のエントロピー

$$H(Q)=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\sum_{\omega}Q_n(\omega)\log Q_n(\omega)$$

$(Q_n=Q|_{[-n,n]})$ である．H は $Q=P_0$ に対して最大値 $\log L$ をとることを確かめることができる．

Ω 上の局所的な関数 f に対して**自由エネルギー** $\psi_0(f)$ を

$$\psi_0(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\log E\left[\exp\left(-\sum_{i=-n}^{n}f(T^i\omega)\right)\right]$$

とおく．これは

$$\psi_0(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\log E\left[e^{-(2n+1)\int fdR_n}\right]$$

と書くこともできるから，R_n の分布に対する大偏差原理が成立することより定理 3 を適用して変分公式

$$\psi_0(f)=\sup_Q\left(-\int f(x)Q(dx)-I_0(Q)\right)$$

が成立する．ここで右辺はすべての T-不変な確率測度についての sup をとる．その中で最大値をとる Q がエネルギー f のギブス測度 P_f である．この事実は (1) において右辺の sup 内の最大値をとる x は $\int y\mu_s(dy)=x$ をみたすものであるという事実に対応する．このように，平衡統計力学において基本的なギブスの変分原理も，ヴァラダンの定理の枠組みの中で捉えることができるのである．

最近統計力学を確率論の立場から本格的に論じた日本語の本[2)]が出版されたので紹介しておく．

6. 拡散過程の経験分布に対する大偏差原理

最後に変分公式のもう一つの応用として，**ドンスカー・ヴァラダン理論**として知られる拡散過程の経験分布に対する大偏差原理について，その問題の背景を述べよう[4)]．V を $\lim_{y\to\pm\infty}V(y)=\infty$ であるような $\mathbf{R}$ 上の連続関数とする．このような V に対して固有値問題

$$\frac{1}{2}\psi''(y)-V(y)\psi(y)=-\lambda\psi(y)$$

のスペクトルは離散スペクトル（固有値）$\{\lambda_1<\lambda_2\le\cdots\}$ のみからなる．対応する正規化された固有関数列を $\{\psi_1,\psi_2,\cdots\}$ としよう．このとき，放物型方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-V(x)u$$

の基本解 $u(t,x,y)$ に対し

$$u(t,x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda_k t}\psi_k(x)\psi_k(y)$$

が成立するが，この基本解はまた

$$u(t,x,y)=E_x\left[\exp\left(-\int_0^t V(w_s)ds\right)\delta(w_t-y)\right]$$

とも表現することができる．ただし右辺は，x を出発する道 $w.$ の空間の上のウィーナー測度 P_x による積分である．これらの両辺の y についての積分をとると，

$$E_x\left[\exp\left(-\int_0^t V(w_s)ds\right)\right]=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda_k t}\psi_k(x)$$

である．これより，M. カッツが示した等式

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log E_x\left[\exp\left(-\int_0^t V(w_s)ds\right)\right]=-\lambda_1$$

が得られる．つまり，微分作用素の最小固有値がウィーナー汎関数の積分によって表現されたことになる．一方，λ_1 はよく知られているように

$$\lambda_1 = \inf_{\|\psi\|_2=1}\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\psi'^2(y)dy+\int_{\mathbf{R}}V(y)\psi^2(y)dy\right\}$$

とも表現される．よってこの２つの式を合わせると次の式が得られる；

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log E_x\left[\exp\left(-\int_0^t V(w_s)ds\right)\right]$$
$$= -\inf_{\|\psi\|_2=1}\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}\psi'^2dy+\int_{\mathbf{R}}V\psi^2dy\right\}. \quad (3)$$

この公式の両辺はそれぞれが固有値 λ_1 に等しいという関係から示されたが，最小固有値という方程式論的な量との関係を経ないで直接「右辺＝左辺」を証明できないだろうか．ヴァラダンによる大偏差原理の理論の成立にはこの問題が大きな動機付けとしてあった．紙面も尽きたので詳細には立ち至らないが，等式 (3) が定理３の変分公式と同じ形をしていることは容易に見てとることができよう．実際，マルコフ過程の経験分布に対する大偏差原理を証明することにより，等式 (3) が証明できるのである．さらに，ドンスカーとヴァラダンはある非線形な汎関数 Φ に対して定理３を適用して**ウィーナーソーセージの問題**および**ポラロンの問題**と呼ばれる問題を解決した[5]．これらは，大偏差原理の最も重要な成果に数えられている．

なお，昨年ドンスカー・ヴァラダン理論に１章を割いて詳述した日本語の本[3]が出版されたので紹介しておく．

7. おわりに

大偏差原理についての文献を紹介しておこう．すでに挙げた２冊の日本語の本の他にストゥルックによるノート[7]もコンパクトで読みやすい．基礎から様々な応用まで丁寧に解説している本としてデンボらによる本[6]を挙げておく．他にもそれぞれ特徴のある良書がいくつも出版されているが，ここでは割愛する．

筆者は数学科の学部４年生のときの少人数のゼミでヴァラダンによる “Stochastic Processes” という 1968 年のクーラン研究所の講義録ノートを輪読した．これは正規の出版物ではないのであまり出回っていないようであるが，わずか 190 頁のタイプ打ちのノートにブラウン運動やレヴィ過程の構成，ヒルベルト空間上の測度，確率解析の初歩，最後には１次元拡散過程まで実に要領よく述べられている．簡潔な設定から物事の本質を抉り出す．語り口は自在で，息苦しさとは無縁である．このノートの記述から受けた印象は，そのまま後になって聴いた彼の講演から受けた印象と重なる．近年になって彼は再び確率論・確率過程論の入門的な本を２冊著した[8,9]．後者の後書きには，近い将来に続編を書きたいとある．大偏差原理とその統計力学への応用を縦横に語った一冊が現れることを期待して，本稿の筆をおこう．

参考文献

1) 舟木直久，「アーベル賞業績紹介/ヴァラダン」，数学セミナー８月号 (2007), 40–47.
2) 黒田耕嗣・樋口保成，『統計力学』，培風館 (2006).
3) 福島正俊・竹田雅好，『マルコフ過程』，培風館 (2007).
4) M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, *Asymptotic evaluation of certain Wiener integrals for large time.* in “Functional Integration and Its Applications”, Proceedings of the International Conference Held at Cumberland Lodge. (1974), Edited by A.M. Arthurs, Clarenton, Oxford, pp.15–33.
5) S.R.S. Varadhan, *Large Deviations and Applications*, SIAM (1984).
6) A. Dembo and O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications, 2nd ed.*, Springer–Verlag (1998).
7) D.W. Stroock, *An Introduction to the Theory of Large Deviations*, Springer (1984).
8) S.R.S. Varadhan, *Probability Theory*, AMS (2001).
9) S.R.S. Varadhan, *Stochastic Processes*, AMS (2007).

（ちよのぶ・たいぞう，関西学院大学理工学部）

確率論と流体力学極限

ヴァラダン



内山 耕平

1. 序

確率論における流体力学極限の研究は，流体の方程式を微視的粒子系から出発して統計力学的に導出しようとする試みに端を発している．本稿で扱う格子気体のような粒子系は微視的な対象とみなされるが，その（確率論的な）運動法則から巨視的な量の法則を導くからくりは**局所平衡**という物理的な考え方に基づいており，それは，流体の運動を統計力学の観点にたって微視的粒子系の運動法則から理解しようとするときに考え出されたものである．

流体の基礎方程式であるEuler方程式は5つの保存量（質量，運動量の3成分とエネルギー）に関する方程式である．その古典的導出では流体を一種の連続体とみなし古典力学が適用される．その際，連続体に働く力，即ち圧力は，局所的な部分系が平衡状態に達していると仮定して熱力学の状態方程式により与えられる．これを熱力学でなく統計力学の立場でみれば，局所的な平衡状態の下では，「莫大な数の物理量の和の計算に際しては個々の物理量は（局所）平衡分布による期待値で置き換えられる」という基本的原理（大数の法則）に基づいて圧力を決定することになる*1)．この意味で，流体力学極限の問題の核心は，保存量を持つ多粒子系について，局所エルゴード定理（局所平衡とその下での大数の法則）を確立することとしてとらえることができよう．

このような流体力学極限の問題は1980年頃から統計力学を確率論の立場から理解しようとする人々により注目され研究されてきたが（[DIPP], [R] 等），1980年代後半になって S.R.S. Varadhan と彼の指導する若い数学者たちの参入によりその研究は目覚ましく進展した．本稿では Varadhan の仕事を中心に，流体力学極限の基本的な考え方を1次元格子気体を例にとって解説する*2)．周知のように Varadhan は大偏差原理*3)の理論の発展に大きな足跡を残してきたが，流体力学極限に関する彼の研究にも同じ問題意識が色濃く現れている．流体力学極限では非平衡系における大数の法則のレベルでの評価が問題になる．Varadhan の発想は，エントロピー不等式に基づき，それを平衡系での大偏差の評価に帰着させようというものである．本稿の最後の節で非勾配系の流体力学極限を導出した Varadhan [V93] の方法に触れるが，そこではこのような考え方の有効性が際立っている．なお非勾配系の流体力学極限の問題と深く関連する話題として多次元単純排他過程における自己拡散過程*4)の問題があるが，これについて

*1) このような仕方で Euler 方程式を数学的に導くのは困難であると思われる．しかし [OVY] では粒子間の衝突に際しわずかな（すなわち極限では消えるような）ランダム力を取り入れることで Euler 方程式が導かれている（但し，解が滑らかである時間内に限る）．

*2) [内・舟] に多くを依っている．

*3) この特集の「大偏差原理と数理物理学」参照．

*4) 印をつけた1個の粒子の運動により定まる確率過程．

は Varadhan による解説 [V96] を参照されたい．

2. 格子気体の流体力学極限

流体力学極限の問題では空間的に一様な運動法則に従って時間発展する粒子系モデルを考える．粒子系は，保存量を持ち，保存量を定めるごとに平衡状態が一意的に定まることが要請される．目標は保存量の満たす（巨視的）方程式を求めることである．問題の本質に焦点をしぼるため，この要請が満たされる限りモデルを単純化する．ここでは，対象とするモデルは 1 次元格子気体で，その時間発展は Markov 的な確率法則に従い，Bernoulli 測度を不変測度にもつ場合に限って話を進める[*5)]．このモデルでは粒子数が唯一の保存量である．

《格子気体モデル》 粒子が動き回る物理的空間は 1 次元の有限格子とし，粒子の運動法則は周期境界条件を満たすとする．言い換えれば，（大きな）自然数 N に対し，1 次元離散トーラス $\mathbf{T}_N = \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \cong \{1,2,\ldots,N\}$[*6)] を物理的空間とし，その上を複数の粒子が特定の（確率的）法則によって運動する系——格子気体——を考える．空間 $\mathbf{T}_N$ 上を運動する気体粒子たちは互いに区別されず，また $\mathbf{T}_N$ の 1 点が 2 つ以上の粒子によって同時に占有されることはないとする（排他条件）．よって格子気体の個々の状態は配置空間

$$\mathcal{X}_N := \{(\eta_x)_{x\in\mathbf{T}_N} : \eta_x = 0 \text{ または } 1\}$$

の一つの元 $\eta = (\eta_x)_{x\in\mathbf{T}_N} \in \mathcal{X}_N$ として表すことができる．ここに $\eta_x = 1$ または 0 は格子点 x に粒子が在るか無いかを表す．$x \in \mathbf{Z}$ は $\mathbf{T}_N$ の一点と同一視され，$\eta_x = \eta_{x+N}$ である．2 つの格子点 x, y に対し配置 η から得られる別の配置 $\eta^{x,y}$ を

$$(\eta^{x,y})_z = \begin{cases} \eta_x & z = y, \\ \eta_y & z = x, \\ \eta_z & \text{その他} \end{cases}$$

と定める．即ち，$\eta^{x,y}$ は x, y の間で η の値を交換して得られる配置である．$\mathcal{X}_N$ 上の関数全体を $C(\mathcal{X}_N)$ と書き，格子点 x, y $(x \neq y)$ に対して，$C(\mathcal{X}_N)$ 上の作用素 $\pi_{x,y}$ を

$$\pi_{x,y}F(\eta) = F(\eta^{x,y}) - F(\eta) \quad (F \in C(\mathcal{X}_N))$$

によって定義する．ここで考える格子気体は，

$$L_N F(\eta) = \sum_{x=1}^{N} c_{x,x+1}(\eta)\pi_{x,x+1}F(\eta),$$

の形の作用素 L_N で生成される $\mathcal{X}_N$ 上の Markov 過程[*7)]である，ここに $c_{x,x+1}$ は $\mathcal{X}_N$ 上の非負関数である．この Markov 過程では状態 η から他の状態 η' への遷移が $\eta' = \eta^{x,x+1}$ $(x \in \mathbf{T}_N)$ の形のときにのみ可能で，そのような遷移の起こる率（飛躍率[*8)]）を与える関数が $c_{x,x+1}(\eta)$ である．特に $c_{x,x+1} = a$（正定数）とすれば L_N により生成される Markov 過程は次のように記述される：各々のボンド $\{x, x+1\}$ に指数分布 $P[\tau > t] = e^{-at}$ に従うランダムな時間 τ を刻む時計が付属し，時間 τ 後に $\eta \to \eta^{x,x+1}$ の遷移が起こる．この遷移の過程は各ボンドごと相互に独立に繰り返される[*9)]．

以下 L_N により生成される格子気体の時刻 t での配置を $\eta^N(t) = \left(\eta^N_x(t)\right)_{x\in\mathbf{T}_N}$ で表す．また格子気体 $(\eta^N(t))_{t\geq 0}$ の確率法則を $\mathbf{P}$ で，$\mathbf{P}$ により平均をとる演算を $\mathbf{E}$ で表す．数学的には，任意の $F \in C(\mathcal{X}_N)$ に対し

$$M_t := F(\eta^N(t)) - \int_0^t L_N F(\eta^N(u))du$$

が**マルチンゲール**になるという条件[*10)]で確率過程 $((\eta^N(t))_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ を特徴づけることができる．特に，

---

*5) 強い混合性のある Gibbs 測度を不変測度にもつ多次元系に拡張できる（[VY], [N]）．

*6) 2 つの整数 x, y を $y - x \in N\mathbf{Z}$ のとき同一視し，それに応じて加法が自然に定義される．

*7) 状態空間が有限な連続時間の Markov 過程である（以下で直感的な説明を与えるが詳しくは [KL], [内・舟] の付録等を参照されたい）．

*8) 単位時間に起こるランダムな飛躍の平均回数に等しい．

*9) どこかのボンドでこの遷移が起こると全系の時計は，遷移の起こった時刻から改めて，新たに時間を刻み始めるとしても同じである．$c_{x,x+1}$ が η に依存するときはこのように理解する必要がある．

*10) 任意の $0 \leq s \leq t$ と，$(\eta^N(u))_{0\leq u\leq s}$ にのみ依存する，任意の事象 A に対し，$\mathbf{E}[M_t - M_s; A] = 0$ となることである．ここに $\mathbf{E}[\cdot; A]$ は A 上での平均（積分）を表す．

$$\frac{d}{dt}\mathbf{E}[F(\eta^N(t))] = \mathbf{E}[L_N F(\eta^N(t))]$$

が従う．確率過程 $(\eta^N(t))_{t\geq 0}$ の確率法則は $\eta^N(0)$ の分布を与えるごとに唯一定まる[*11]．

《飛躍率についての仮定》 $\mathcal{X}_N$ 及び $C(\mathcal{X}_N)$ 上のシフト作用素 τ_x, $x \in \mathbf{Z}$ を

$$(\tau_x\eta)_y = \eta_{x+y} \quad (\eta \in \mathcal{X}_N),$$
$$\tau_x f(\eta) = f(\tau_x\eta) \quad (f \in C(\mathcal{X}_N))$$

で定義する．また $\mathcal{X} = \{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ と置き，$\mathcal{F}_c$ で $\mathcal{X}$ 上の局所関数全体を表す：$f \in \mathcal{F}_c \Longleftrightarrow r > 0$ が在って f は $(\eta_x)_{|x|\leq r}$ にのみ依存．$f \in \mathcal{F}_c$ は $N > r$ ならば $C(\mathcal{X}_N)$ の要素とみなせる．τ_x は $\mathcal{X}$ または $\mathcal{F}_c$ 上のシフト作用素 τ_x に自然に拡張される．

飛躍率 $\{c_{x,x+1}\}$ に関し次の条件 1–4 を仮定する．

1. $c_{0,1} \in \mathcal{F}_c$ （相互作用の局所性）
2. $\eta_0 \neq \eta_1$ ならば $c_{0,1}(\eta) > 0$ （非退化性）
3. $c_{x,x+1} = \tau_x c_{0,1}$ （空間的一様性）
4. $\pi_{0,1}c_{0,1} = 0$ （対称性）

条件 2 と 3 により，粒子数が唯一の保存量で，Markov 過程 $(\eta^N(t))_{t\geq 0}$ は粒子数

$$|\eta| := \eta_1 + \cdots + \eta_N \quad (\eta \in \mathcal{X}_N)$$

によりエルゴード分解される[*12]．

配置空間 $\mathcal{X}_N$ 上の確率測度 μ は $\{0,1\}$ 上の確率測度 μ^1 の N 重直積であるとき **Bernoulli 測度**であるという．このとき $\mu^1(\{1\}) = \rho \in [0,1]$ を Bernoulli 測度の密度と呼ぶ．密度 ρ の Bernoulli 測度を ν_ρ^N で表す．確率論の用語によれば ν_ρ^N の下で $\{\eta_x\}_{x\in\mathbf{T}_N}$ は独立同分布かつ $E^{\nu_\rho^N}[\eta_x] = \rho \ (x \in \mathbf{T}_N)$ である（E^ν は ν による平均を表す）．条件 4 により ν_ρ^N はすべて $\eta^N(t)$ の不変測度である[*13]．

*11) 従って，確率法則 $\mathbf{P}$ は N のみでなく初期分布にも依存するがそれらの依存性は簡略化のため表記しない．

*12) $0 < s < t$, $|\eta| = |\eta'|$ ならば $\mathbf{P}[\eta^N(s) = \eta, \eta^N(t) = \eta'] > 0$ である．

*13) より強く作用素 L_N は ν_ρ^N に関して対称である．

《スケール変換》 上述の格子気体は，格子間隔を 1 に規格化したスケール（尺度）で見た微視的粒子系である．いわば顕微鏡下で見る世界である．我々の目標はこの系の巨視的（いわば肉眼で見える世界の）描像を求めることである．そのためまず時空の巨視的スケールを導入しよう．

空間変数については，巨視的空間として単位トーラス $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \cong [0,1)$ をとり，$\mathbf{T}_N$ を格子 $N^{-1}\mathbf{T}_N \subset \mathbf{T}$ に対応させる，つまり $1/N$ に縮小して $\mathbf{T}$ に埋め込む，スケール変換を行う．

この巨視的空間スケールで見た粒子系は N を止めれば有限系だから十分時間が経てば系は平衡状態に近づき，空間的一様性より粒子たちは巨視的空間 $\mathbf{T}$ にほぼ一様に分布するように見えるであろう．他方短い時間内では，系の巨視的状態に本質的変化は観測されない．N が大きくなればなるほど系全体の変化は緩慢になるから，変化が現れるための時間は N とともに大きくなるはずである．系の巨視的状態の時間発展が観測されるためには N の大きさに応じて時間のスケールを適切に定めねばならない．このモデルでは巨視的時間の単位を微視的時間の N^2 倍にとるのが適切である．空間のスケール変換と合わせて，結局時間と空間のスケールを同時に

$$(\tau, x) \in [0, TN^2] \times \mathbf{T}_N$$
$$\to \left(t = \frac{\tau}{N^2},\ \theta = \frac{x}{N}\right) \in [0,T] \times \mathbf{T}$$

（T は正定数）によって変換する．そこで

$$\tilde{\eta}^N(t) = \eta^N(N^2 t)$$

と置き，$\mathbf{T}$ 上の粒子配置の標本分布を

$$\alpha_t^N(d\theta) = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} \tilde{\eta}_x^N(t)\delta_{x/N}(d\theta)$$

と定義する[*14]．即ち，$\mathbf{T}$ の閉区間 $[a,b]$ $(0 < a < b \leq 1)$ に対し

$$\alpha_t^N([a,b]) = N^{-1}\sum_{a\leq x/N\leq b} \tilde{\eta}_x^N(t).$$

α_t^N は唯一の保存量である粒子数の経験分布を巨

*14) $\delta_{x/N}(d\theta)$ は 1 点 x/N にのみ重み 1 を持つ測度を表す．

視的時空のスケールの下で表現したものである．

《流体力学極限》 我々のモデルに対する流体力学極限では非線形拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(D(\rho)\frac{\partial}{\partial \theta}\rho\right) \tag{1}$$

が現れる．但し $\rho=\rho(t,\theta)$ は $(t,\theta)\in[0,\infty)\times\mathbf{T}$ の関数で，拡散係数 D は以下で与えられる一変数 $\rho\in[0,1]$ の連続関数である．

密度 ρ をもつ $\mathcal{X}$ 上の Bernoulli 測度を ν_ρ で表し，$0<\rho<1$ のとき，局所関数 $f\in\mathcal{F}_c$ に対して，

$$J_f(\eta)=\eta_0-\eta_1-\sum_{y=-\infty}^{\infty}\pi_{0,1}(\tau_y f),$$

$$D(\rho;f)=\frac{1}{2(\rho-\rho^2)}E^{\nu_\rho}\left[J_f^2 c_{01}\right]$$

と置く．$f\in\mathcal{F}_c$ だから $\sum_{y=-\infty}^{\infty}\pi_{0,1}(\tau_y f)$ は有限和であることに注意する．このとき $D(\rho)$ を次の変分公式で定義する：$0<\rho<1$ に対し

$$D(\rho)=\inf_{f\in\mathcal{F}_c}D(\rho;f); \tag{2}$$

端点 $\rho=0,\,1$ では連続に拡張される．

定理 I（流体力学極限）． 初期配置 $\eta^N(0)$ について，$\mathbf{T}\cong[0,1)$ 上の連続関数 ρ_0 が在って $N\to\infty$ としたとき任意の区間 $[a,b]\subset\mathbf{T}$ に対し

$$\alpha_0^N([a,b])\to\int_{[a,b]}\rho_0(\theta)d\theta \qquad \text{（確率収束）}$$

となることを仮定すれば，任意の $t>0$ と任意の区間 $[a,b]\subset\mathbf{T}$ に対し

$$\alpha_t^N([a,b])\to\int_{[a,b]}\rho(t,\theta)d\theta \qquad \text{（確率収束）}$$

が成り立つ．ここに極限密度関数 $\rho(t,\theta)$ は，非線形拡散方程式 (1) に対する Cauchy 問題の $\rho_0(\theta)$ を初期関数とする一意的な解である．

拡散係数 D を与える変分公式 (2) は Varadhan [V93] による．最後の節で概略を述べるように (2) は定理 I の証明において自然な公式として現れる．他方，平衡系での揺動を考えると，その極限過程は D をずれ項の係数とする無限次元 Ornstein–Uhlenbeck 過程になるであろうことが容易に推測され，このことから導かれる D の表式——Green–Kubo 公式——が以前から知られていた．定理 I はこの推測が正しいことをも実質的に保証しており，その結果，Green–Kubo 公式が変分公式 (2) と同等であることがわかる（[S], [内・舟] 参照）．

3. 局所平衡

序で述べたように流体力学極限を特徴づけるのは局所平衡の概念である．ここでは勾配条件という都合の良い条件を仮定して流体力学極限が導出される道筋を概観し，局所平衡の概念がそこで果たす役割を説明する．

定理の結論を示すには，任意に試験関数 $\varphi\in C^\infty(\mathbf{T})$ をとり，標本分布 $\alpha_t^N(d\theta)$ による φ の積分

$$\alpha_t^N(\varphi):=\int_{\mathbf{T}}\varphi(\theta)\alpha_t^N(d\theta)$$

が極限密度関数による積分 $\int_{\mathbf{T}}\varphi(\theta)\rho(t,\theta)d\theta$ に確率収束することを示せば十分である．計算を遂行するために，$\eta\in\mathcal{X}_N$ の関数

$$F(\eta)=\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\eta_x\varphi\left(\frac{x}{N}\right)$$

を用いて，

$$\alpha_t^N(\varphi)=F(\tilde\eta^N(t))$$

と表しておく．過程 $\tilde\eta^N(\cdot)$ の生成作用素は N^2L_N である．$\alpha_t^N(\varphi)$ の時間変化を調べるために，

$$b^N(\eta):=N^2L_NF(\eta)$$

と置き確率過程 $M_t^N,\,t\ge0$ を，

$$\alpha_t^N(\varphi)=\alpha_0^N(\varphi)+\int_0^t b^N(\tilde\eta^N(s))\,ds+M_t^N$$

によって定義する．M_t^N はマルチンゲールであり，マルチンゲールの一般論を用いれば一様評価

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}|M_t^N|^2\Big]=0 \tag{3}$$

が比較的容易に導かれる．

ずれ項 $b^N = b^N(\eta)$ を計算しよう．

$$w_{x,x+1}(\eta) = c_{x,x+1}(\eta)(\eta_x - \eta_{x+1})$$

と置けば簡単な計算により $L_N\{\eta_x\} = w_{x-1,x} - w_{x,x+1}$ が得られる．したがって

$$b^N = N\sum_{x=1}^{N}(w_{x-1,x} - w_{x,x+1})\varphi\left(\frac{x}{N}\right).$$

部分和の公式により最後の和を書き換えれば

$$b^N = \sum_{x=1}^{N} w_{x,x+1}\cdot\nabla_N\varphi\left(\frac{x}{N}\right), \qquad (4)$$

$$\nabla_N\varphi\left(\frac{x}{N}\right) = N\Big[\varphi\left(\frac{x+1}{N}\right) - \varphi\left(\frac{x}{N}\right)\Big].$$

$w_{x,x+1}$ は**カレント**（current）と呼ばれる．

《勾配条件》 $\nabla_N\varphi(x/N) = \varphi'(x/N) + o(1)$ だから，(4) の右辺は見かけ上の発散項である，次に述べる勾配条件は (4) の右辺でさらに部分和をとる演算を可能にし，その結果 $b^N(\eta)$ は一様有界となり問題は大いに単純化する．

> **定義**：或る $h \in \mathcal{F}_c$ により $w_{0,1} = h - \tau_1 h$ と書けるとき格子気体は**勾配条件**を満たすあるいは**勾配系**であると言う．

例えば，$\lambda > -\frac{1}{2}$ を定数として $c_{0,1}(\eta) = 1 + \lambda(\eta_{-1} + \eta_2)$ は勾配条件を満たす*15)．序で述べた古典的なモデルは一種の勾配系になっている．格子気体ではこの条件は特殊であるが，勾配系について流体力学極限の基本的構造を理解しておくことが一般の系を扱う際の重要な指針を与えることになる．

勾配条件を仮定すれば，(4) はさらに

$$b^N = \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\tau_x h\cdot\Delta_N\varphi\left(\frac{x}{N}\right). \qquad (5)$$

と書き換えられる．但し Δ_N は $\mathbf{T}_N$ 上の Laplace 作用素である*16)．$\Delta_N\varphi(x/N) = \varphi''(x/N) + O(1/N)$ だから結局 (3) 及びその前の式と合わせて

$$\alpha_t^N(\varphi) - \alpha_0^N(\varphi) = \int_0^t \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\tau_x h(\tilde{\eta}^N(s))\cdot\varphi''\left(\frac{x}{N}\right)ds + o(1). \qquad (6)$$

《極限方程式の導出》 最後の関係から流体力学極限に現れる非線形拡散方程式 (1) がどのように見えてくるかを説明しよう．要点をわかり易くするためランダムでない関数 $\rho(t,\theta)$ が在って $\alpha_t^N(\varphi) \to \int_{\mathbf{T}}\rho(t,\theta)\varphi(\theta)\,d\theta$ ($\varphi \in C^\infty(\mathbf{T})$) となることを仮定してしまう．

単純排他過程（$c_{0,1} = 1$）では $h(\eta) = \eta_0$ となり（先の例で $\lambda = 0$），(6) に現れる被積分関数は $\alpha_s^N(\varphi'')$ と書け，$N \to \infty$ とした極限で熱方程式が現れる．しかし，一般には (6) の右辺は $\alpha_\cdot^N$ で表現されていないので，α_t^N の収束から，極限の密度関数 $\rho(t,\theta)$ に対する閉じた方程式が直ちに得られるわけではない．

そこでさらに次のような（素朴な意味での）**局所平衡**が成立するものとする．即ち，巨視的時空のパラメータ $(t,\theta) \in (0,\infty)\times\mathbf{T}$ を指定するごとに $\lfloor N\theta\rfloor$ を中心とした*17)微視的粒子配置

$$\cdots\cdots,\tilde{\eta}^N_{\lfloor N\theta\rfloor-1}(t),\ \tilde{\eta}^N_{\lfloor N\theta\rfloor}(t),\ \tilde{\eta}^N_{\lfloor N\theta\rfloor+1}(t),\cdots\cdots$$

の確率法則は不変測度 $\nu_{\rho(t,\theta)}$ で近似されること，正確に言えば，任意の $f \in \mathcal{F}_c$ に対し

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}[f(\tau_{\lfloor N\theta\rfloor}\tilde{\eta}^N(t))] = E^{\nu_{\rho(t,\tau)}}[f] \quad (7)$$

が成り立つことを仮定しよう．そうすれば θ を止めるごとに，$\lfloor N\theta\rfloor$ を中心とした（微視的）局所系に大数の法則（LLN）が適用でき，$\hat{h}(\rho) = E^{\nu_\rho}[h]$ とおけば，順次 $N \to \infty, K \to \infty$ とするとき

$$\frac{1}{2K+1}\sum_{|x-\lfloor N\theta\rfloor|\le K} h(\tilde{\eta}_x^N(t)) \ \longrightarrow\ \hat{h}(\rho(t,\theta))$$

（確率収束）．この収束により，(6) の右辺において，$x \in \mathbf{T}_N$ にわたる算術平均を局所的な算術平均の算術平均として表し，φ'' の滑らかさを考慮すれば，各変数 $\tau_x h(\tilde{\eta}^N(s))$ は局所平衡分布による期待値 $\hat{h}(\rho(t,x/N))$ で置き換えられる．その結果 $N \to \infty$ のとき，(6) の右辺の被積分関数は

---

*15) $h(\eta) = (\lambda+1)\eta_0 + \lambda(\eta_{-1} - \eta_0)(\eta_0 - \eta_1)$ ととる．

*16) $\Delta_N\varphi(x/N) = N(\nabla_N\varphi(x/N) - \nabla_N\varphi((x-1)/N))$.

*17) $\lfloor a\rfloor$ は $a \in \mathbf{R}$ を超えない最大の整数を表す．

$$\overset{LLN}{\sim} \frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} \hat{h}\left(\rho\left(t,\frac{x}{N}\right)\right)\varphi''\left(\frac{x}{N}\right) \qquad (8)$$

$$\longrightarrow \int_{\mathbf{T}} \hat{h}(\rho(t,\theta))\varphi''(\theta)\,d\theta$$

と振る舞うことになる．かくして $\rho_t(\theta)=\rho(t,\theta)$ についての閉じた方程式

$$\int_{\mathbf{T}} \rho_t\varphi\,d\theta = \int_{\mathbf{T}} \rho_0\varphi\,d\theta + \int_0^t ds\int_{\mathbf{T}} \hat{h}(\rho_s)\varphi''\,d\theta$$

が見出される．$D(\rho)=\hat{h}'(\rho)$*18) と置けばこれは $\rho(t,\theta)$ が方程式 (1) に対する Cauchy 問題の初期値を ρ_0 とする弱解であることを意味する．

実際の証明では，上の議論で極限密度 $\rho(t,\theta)$ の代わりに標本密度関数 $\rho^{N,\varepsilon}(t,\theta) := (2\varepsilon)^{-1}\alpha_t^N([\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon])$ をとり，順に $N\to\infty$, $\varepsilon\downarrow 0$ とすることで (8) の近似が(時間に関する平均収束の意味で)成り立つことを示すことになる．それゆえ近似密度関数 $\rho^{N,\varepsilon}(t,\theta)$ 自身がランダムであり，極限操作を可能にするように局所平衡を適切に定式化し，その成立を証明するのは決して単純な問題でない．そのための一般的方法が [GPV] で与えられている．

4. 非勾配系

勾配系でなければ，(6) のような変形は不可能であり，したがって，ずれ項の時間積分

$$\int_0^t \sum_{x=1}^{N} w_{x,x+1}(\eta^N(s))\cdot\nabla_N\varphi\left(\frac{x}{N}\right)ds \qquad (9)$$

は見かけ上の発散項で，このままでは極限の形がどうなるか見当がつかない．この困難は Varadhan [V93]*19) により解決された．証明の基本的方針は，カレント $w_{x,x+1}$ が密度勾配 $\eta_{x+1}-\eta_x$ に比例すること，即ち定数 D を適切に選べば微視的レベルでの Fick の法則*20) とでも言うべき関係

$$w_{x,x+1} \simeq -D[\eta_{x+1}-\eta_x] \qquad (10)$$

が成り立つことを示すことである．この式の正確な意味（後の (12) 式）を述べる前にその証明の基礎となる不等式を与えておこう．

不変分布 $\nu_{1/2}^N$ を初期分布とするときの確率過程 $(\tilde{\eta}^N(t))_{0\le t\le 1}$ の法則を $P_{\rm eq}^N$ で，$P_{\rm eq}^N$ による平均を $E_{\rm eq}^N$ で表す．X を $(\tilde{\eta}^N(t))_{t\ge 0}$ の関数とするとエントロピー不等式*21) より次の不等式が導かれる．

$$\mathbf{E}|X| \le \frac{1}{\beta N}\log E_{\rm eq}^N[e^{N\beta X}+e^{-N\beta X}] + C/\beta, \qquad (11)$$

ここに C は特定の*22)，β は任意の正定数である．X としては (9) を一般化した形

$$X^N\{F\} := \int_0^T \sum_{x=1}^{N} \tau_x F(\eta^N(s))\varphi\left(\frac{x}{N}\right)ds$$

（$F\in\mathcal{F}_c$）の量をとることになる．(11) は非平衡系での L_1 評価を平衡系での大偏差原理型の指数評価（単に大偏差型評価と略す）に帰着させるものである．

さて，(10) で D は平衡状態を定める密度 ρ の関数である．この ρ には配置 $\eta\in\mathcal{X}_N$ の局所経験分布密度

$$\bar{\eta}_{x,K} := \frac{\eta_{x-N}+\cdots+\eta_{x+K}}{2K+1}$$

を代入し，また $w_{x,x+1}$ と $\eta_x-\eta_{x+1}$ はそれぞれの局所的な算術平均で置き換えて次の量を導入する．

$$g_x^K(\eta) = w_{x,x+1}(\eta) - D(\bar{\eta}_{0,K})[\eta_x-\eta_{x+1}],$$

$$G_K^0(\eta) = \frac{1}{2K}\sum_{|x|<K-\sqrt{K}} g_x^K(\eta).$$

このとき (10) の具体的表現は次式で与えられる．

$$\lim_{K\to\infty}\overline{\lim_{N\to\infty}}\,\mathbf{E}|X^N\{G_K^0\}| = 0 \qquad (12)$$

(12) の証明は，(11) に基づいて平衡系での大偏差型の評価を行うことによってなされる．その際，$X^N\{G_K^0\}$ そのものの大偏差型評価が 0 になる*23) わけではないことに注意する．平均収束の

*18) 先の例では $\hat{h}(\rho)=\rho+\lambda\rho^2$, $D(\rho)=1+2\lambda\rho$.

*19) Ginzburg–Landau 模型を扱っている．

*20) 拡散現象においては溶質の流れの大きさはその濃度勾配に比例するという法則．

*21) Jensen の不等式に基づく一般的な不等式である．

*22) $P_{\rm non}^N=\mathbf{P}$ の $P_{\rm eq}^N$ に関する相対エントロピーの上界 CN から来る．

*23) 即ち，(11) の右辺第 1 項 $\to 0$ $(N\to\infty)$.

評価では無視できる量であっても一般には大偏差型評価の下では 0 でない量として現れうるからである．従って大偏差型評価をするべき量は上記の量そのものである必要はなく，非平衡系で平均収束の意味で無視できるような量は加えてよい．一方，$X^N\{F\}$ の大偏差型評価をする上で自然な F の空間*24) はすべての $0 \le \rho \le 1$ に対し $E^{\nu_\rho}[F]=0$ となる $F \in \mathcal{F}_c$ の全体であり*25)，かつこの空間は或る意味で $w_{0,1}$, $\eta_1-\eta_0$ 及び $\{Lf : f \in \mathcal{F}_c\}$ で張られることが証明できる．しかも次式が成り立っている：$f \in \mathcal{F}_c$ ならば

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}|X^N\{Lf\}| = 0. \qquad (13)$$

基本的な結果を述べておこう．G_K^0 に現れる $D(\rho)$ は変分公式 (2) により定義されているとし

$$G_K^f = \frac{1}{2K} \sum_{|x|<K-\sqrt{K}} (g_x^K + \tau_x Lf),$$

と置けば，次の定理が成り立つ．

定理 II 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $f \in \mathcal{F}_c$ がとれて

$$\overline{\lim_{K\to\infty}}\ \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \log E_{\mathrm{eq}}^N \exp\left(NX^N\{G_K^f\}\right) < \varepsilon.$$

(11), (13) 及び定理 II より (12) が成り立つことは明らかであろう．(10) のような象徴的表現をすると定理 II の主張は

$$w_{x,x+1} \cong D[\eta_x - \eta_{x+1}] + \tau_x Lf \qquad (14)$$

となる．但し，(10) の等価性は非平衡系での大数の法則のレベルであるが，(14) は平衡系における超指数的評価の精度での等価性である．D の定義式 (2) は実はこの意味で (14) が成り立つように D を与える式に他ならない．平衡系での超指数的評価を要求することで拡散係数 D を決定していることになる．定理 II の証明のためには，一般的な事実*26) を援用して，大偏差型評価を順次，中心極限定理の分散の評価，L_N のスペクトルの飛びの評価に帰着させる．流体力学極限はカレント $w_{x,x+1}$ が $D(\bar{\eta}_{x,K})[\eta_{x+1}-\eta_x]$ で置き換えられれば勾配系のときと同様の考え方で導かれる（詳しい解説が [KL], [内・舟] でなされているので参照されたい）．

*24) (11) で $X = X^N\{F\}$ としたとき右辺が有界になるような $F \in \mathcal{F}_c$ の空間．

*25) 後に触れる中心極限定理の分散による評価に基づく．

*26) Feynman–Kac の公式，対称作用素のスペクトルの端点の変分表現，Rayleigh–Schrödinger 摂動展開等である．

参考文献

[DIPP] A. De Masi, N. Ianiro, A. Pellegrinotti and E. Presutti: A survey of the hydrodynamical behavior of many-particle systems, in: Nonequilibrium Phenomena II, From Stochastics to Hydrodynamics, eds. Lebowitz and Montroll, Elsevier Science Publishers BV, 1984.

[GPV] M.Z. Guo, G.C. Papanicolaou and S.R.S. Varadhan: Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions, *Comm. Math. Phys.*, **118** (1988) 31–59.

[KL] C. Kipnis and C. Landim: Scaling limits of particle systems, Springer, 1999.

[KOV] C. Kipnis, S. Olla and S.R.S. Varadhan: Hydrodynamics and large deviation for simple exclusion processes, *Comm. Pure Appl. Math.*, **42** (1989) 115–137.

[N] Y. Nagahata: Regularity of the diffusion coefficient matrix for lattice gasreversible under Gibbs measures with mixing condition, *Comm. Math Phys.* **273** (2007) 637–650.

[OVY] S. Olla, S.R.S. Varadhan and H.T. Yau: Hydrodynamical limit for a Hamiltonian system with weak noise, *Comm. Math. Phys.*, **155** (1993) 523–560.

[R] H. Rost: Non-equilibrium behavior of a many particle process: density profile and local equilibria, *Z. Wahr. verw. Gebiete*, **58** (1981) 41–53.

[S] H. Spohn: Large Scale Dynamics of Interacting Particles, Springer, 1991.

[内・舟] 内山耕平・舟木直久：『ミクロからマクロへ 2（格子気体の流体力学極限）』，シュプリンガー・ジャパン，2002.

[V93] S.R.S. Varadhan: Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions - II, In "Asymptotic problems in probability theory", eds. Elworthy and Ikeda, 1993, pp.75–128.

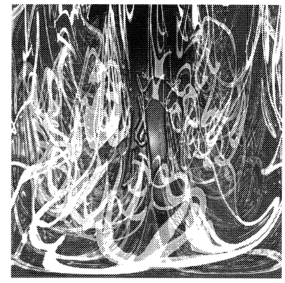
[V96] S.R.S. Varadhan: The complex story of simple exclusion, in "Itô's Stochastic Calculus and Probability Theory", eds. Ikeda, Watanabe, Fukushima and Kunita, Springer, 1996, 385–400.

[VY] S.R.S. Varadhan and H.T. Yau: Diffusive limit of lattice gas with mixing conditions, *Asian J. Math.* **1** (1997) 623–678.

（うちやま・こうへい，東京工業大学大学院理工学研究科）

確率論的場の量子論

シュポーン



廣島　文生

1. はじめに

Herbert Spohn は数理物理学の世界的なリーダーの一人であり，現在ミュンヘン工科大学に所属している．鋭い物理的感覚と驚異的な計算量を背景に統計力学，場の量子論，古典力学を初め，最近ではランダム行列などにも着手している．また場の量子論と量子力学，古典論と量子力学などの境界領域の研究にも多くの結果がある．議論好きで早口，服装には無頓着なようである．研究室の椅子に座っている彼の姿を見ると，いつも誰かと議論するのを待っているような気配を感じる．

Spohn は 1980 年代後半から確率論的なアプローチにより場の量子論における基底状態，共鳴現象の解析に関して数多くの先駆的な結果を導出してきた．特に Wiener 測度から構成される無限体積ギブス測度によって，**赤外発散**と**基底状態**[*1)]**の存在・非存在**の問題に決定的な結果をもたらした．

この論説では確率論的場の量子論の基本的部分の概括を紙数の許す範囲でできる限り厳密に論じる．

2. $\mathrm{p}(\phi)_1$-過程

量子力学で支配される粒子のハミルトニアン H_p が生成する**熱半群** e^{-tH_p} の期待値をパス空間上に記述する方法がある．ポテンシャルを $V:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ とすれば H_p は一般に $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の**自己共役作用素**

$$H_\mathrm{p}=-\frac{1}{2}\Delta+V$$

で与えられる．$[0,\infty)$ 上の **$\mathbb{R}^3$-値連続パス空間** $\Omega_+=C([0,\infty);\mathbb{R}^3)$ に局所一様位相を導入する．それから決まるボレル σ 代数 $\mathscr{B}(\Omega_+)$ 上には **Wiener 測度** P^x が定義される．このとき $(\Omega_+,\mathscr{B}(\Omega_+),P^x)$ 上の確率過程 $B_s(w)=w(s)$, $w\in\Omega$ は $x\in\mathbb{R}^3$ から出発する**ブラウン運動**になる．$\mathrm{E}_{P^x}[\cdots]=\int\cdots\mathrm{d}P^x$ とすれば $e^{-tH_\mathrm{p}}f$ は

$$\left(e^{-tH_\mathrm{p}}f\right)(x)=\mathrm{E}_{P^x}\left[e^{-\int_0^t V(B_s)\mathrm{d}s}f(B_t)\right] \tag{1}$$

と表せる．これを **Feynman–Kac の公式**[2] と言う．変数 x は $\mathbb{R}^3$ を動くから，期待値 $(f,e^{-tH_\mathrm{p}}g)$ は (1) より $\mathbb{R}^3\times\Omega_+$ 上の測度 $\mathrm{d}x\mathrm{d}P^x$ で積分表示できるがそれは有限測度ではない．しかし拡散過程の理論を使えば確率空間上での積分表示が可能である．まずは，それを見よう．

H_p の正規化された基底状態 φ_p は十分滑らかでかつ $\varphi_\mathrm{p}>0$ としよう．この仮定は，端点を固定した弦の振動を想像すると分かり易い

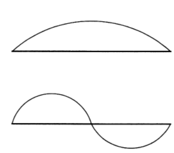


図 1　ゼロ点の数．

*1)　この論説では自己共役作用素のスペクトルの下限に対応する固有ベクトルを（存在すれば）基底状態と言う．

(図 1). さて $\varphi_{\rm p}$ が正規化されているので $\varphi_{\rm p}^2{\rm d}x$ は $\mathbb{R}^3$ 上の確率測度になる. ユニタリー変換 $U: L^2(\mathbb{R}^3;\varphi_{\rm p}^2{\rm d}x)\to L^2(\mathbb{R}^3;{\rm d}x)$ を $f\mapsto\varphi_{\rm p}f$ で定めれば $H_{\rm p}$ は

$$L_{\rm p}:=U^{-1}H_{\rm p}U=-\frac{1}{2}\Delta-\frac{\nabla\varphi_{\rm p}}{\varphi_{\rm p}}\cdot\nabla$$

に変換される. この形から $L_{\rm p}$ は適当な確率空間 $(S,\mathscr{B},m)$ 上の**確率微分方程式***2)

$$\mathrm{d}X_t=-\frac{\nabla\varphi_{\rm p}}{\varphi_{\rm p}}(X_t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}B_t,\quad X_0=x \tag{2}$$

の解 X_t^x の生成子になる. つまり

$$\left(e^{-tL_{\rm p}}g\right)(x)=\mathrm{E}_m[g(X_t^x)].$$

これから $\left(\bar{f}_1\varphi_{\rm p},\prod_{i=1}^n e^{-(t_{i+1}-t_i)H_{\rm p}}f_i\varphi_{\rm p}\right)$ は

$$\int\mathrm{E}_m\left[\prod_{i=1}^n f_i(X_{t_i}^x)\right]\varphi_{\rm p}^2\mathrm{d}x \tag{3}$$

と表せる. さて X_t^x は $t\in\mathbb{R}$ まで拡張できて, t について連続である. $\Omega=C(\mathbb{R};\mathbb{R}^3)$ とおく. 写像 $\theta:\mathbb{R}^3\times S\to\Omega$, $(x,\omega)\mapsto X_\cdot^x(w)$ の Ω 上の分布を $\mathscr{N}$ とかく*3). $(\Omega,\mathscr{B}(\Omega),\mathscr{N})$ 上の確率過程 $q_t(w)=w(t)$ は **p(ϕ)$_1$-過程**と呼ばれ, (3) は

$$\mathrm{E}_{\mathscr{N}}\left[\prod_{i=1}^n f_i(q_{t_i})\right]$$

と表せる. $\mathrm{p}(\phi)_1$-過程の例を挙げよう. $\omega>0$ を定数とする**調和振動子** $\frac{1}{2}(-\Delta+\omega^2|x|^2-\omega)$ の正規化された基底状態は $(\omega/\pi)^{1/4}e^{-\omega|x|^2/2}$ で, 対応する q_t はガウス過程で,

$$\mathrm{E}_{\mathscr{N}}[q_t]=0,\quad \mathrm{E}_{\mathscr{N}}[q_tq_s]=\frac{1}{2\omega}e^{-|t-s|\omega} \tag{4}$$

となる. この q_t を **Ornstein–Uhlenbeck**(**OU**)**過程**と言う.

3. ユークリッド的場の量子論と無限次元 OU-過程

場の量子論[3)]の確率論的な表現を見よう. ボーズ統計を考慮して n 粒子ボゾンの状態空間は対称な L^2 空間 $L^2_{\rm sym}(\mathbb{R}^{3n})$ で定義される. 素粒子は生成・消滅を繰り返し, その個数には期待値の意味しかないのでボゾンの状態空間は n 粒子状態の無限直和 $\mathscr{F}=\bigoplus_{n=0}^\infty L^2_{\rm sym}(\mathbb{R}^{3n})$ で定義される. $1_{\rm v}=\{1,0,0,\cdots\}\in\mathscr{F}$ を **Fock 真空**と言う. 質量がゼロで, 運動量 k のボゾンのエネルギーは $|k|$ で与えられ, $\mathscr{F}$ 上の**自由ハミルトニアン** $H_{\rm f}$ は $\{\Psi_n\}_{n=0}^\infty\in\mathscr{F}$ に対して

$$(H_{\rm f}\Psi)_n(k_1,\cdots,k_n)=\left(\sum_{j=1}^n|k_j|\right)\Psi_n(k_1,\cdots,k_n)$$

で定義される. $H_{\rm f}$ のスペクトルは $[0,\infty)$ で 0 が唯一の固有値でその固有ベクトルは $1_{\rm v}$ である.

次に場の作用素を定義しよう. $\mathscr{F}$ 上の**生成・消滅作用素**をそれぞれ $a^\dagger(k)$, $a(k)$ で表せば, それは**正準交換関係** $[a(k),a^\dagger(k')]=\delta(k-k')$ を満たす. $\hat{f}$ を f のフーリエ変換とする.

$$\Phi_t(\hat{f})=\int\left(\frac{\hat{f}(k)e^{i|k|t}}{\sqrt{2|k|}}a^\dagger(k)+\frac{\hat{f}(-k)e^{-i|k|t}}{\sqrt{2|k|}}a(k)\right)\mathrm{d}k$$

を**時刻 t の場の作用素**と言う. 時刻ゼロの場の作用素を $\Phi_0=\Phi$ とおけば, その時間発展は $\Phi_t(\hat{f})=e^{-itH_{\rm f}}\Phi(\hat{f})e^{itH_{\rm f}}$ となるので 2 点相関関数は

$$(\Phi_t(\hat{f})1_{\rm v},\Phi_s(\hat{g})1_{\rm v})=(\Phi(\hat{f})1_{\rm v},e^{-i(t-s)H_{\rm f}}\Phi(\hat{g})1_{\rm v})$$

と表せ, さらに右辺は

$$\frac{1}{2}\int\overline{\hat{f}(k)}\hat{g}(k)e^{-i(t-s)|k|}\frac{\mathrm{d}k}{|k|} \tag{5}$$

と計算できる. 熱半群 $e^{-tH_{\rm f}}$ の**汎関数積分表示**をえるために, この 2 点相関関数を虚時間へ解析接続することを考える. まず, Wightman 超関数

$$\mathcal{W}(t,x)=\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{e^{-it|k|+ikx}}{|k|}\mathrm{d}k$$

を用いれば (5) は $\int f(x)g(y)\mathcal{W}(t-s,x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

---

*2) ここで B_t は $(S,\mathscr{B},m)$ 上のブラウン運動を表す.

*3) θ の Ω 上の分布は $K\in\mathscr{B}(\Omega)$ に対して, $\mathscr{N}(K)=\int\theta^{-1}(K)\varphi_{\rm p}(x)^2\mathrm{d}x$ と定める.

とかけることに注意する．Wightman 超関数を $t \to -it$ に解析接続すれば $\boldsymbol{k} = (k, k_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ として

$$\mathcal{W}(t,x) \overset{t \longrightarrow -it}{\to} \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{-ik_0t+ikx}}{|k|^2+|k_0|^2}\mathrm{d}\boldsymbol{k}$$

となる．ゆえに，虚時間へ解析接続した 2 点相関関数は $\delta_t(x) = \delta(x-t)$ を用いて次のように表せる．

$$\begin{aligned}&(\Phi(\hat{f})1_{\mathrm{v}}, e^{-|t-s|H_{\mathrm{f}}}\Phi(\hat{g})1_{\mathrm{v}}) \\ &= \int \overline{\widehat{\delta_t \otimes f}(\boldsymbol{k})}\widehat{\delta_s \otimes g}(\boldsymbol{k})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{|k|^2+|k_0|^2} \\ &= \int \overline{\hat{f}(k)}\hat{g}(k)\frac{e^{-|t-s||k|}}{2|k|}\mathrm{d}k. \qquad (6)\end{aligned}$$

OU-過程 (4) と比べれば (6) の右辺に OU-過程の構造が現れることが分かるだろう．さて $(1_{\mathrm{v}}, \Phi(\hat{f})1_{\mathrm{v}}) = 0$,

$$(1_{\mathrm{v}}, e^{i\Phi(\hat{f})}1_{\mathrm{v}}) = \exp\left(-\frac{1}{4}\int |\hat{f}(k)|^2\frac{\mathrm{d}k}{|k|}\right)$$

に注意して，共分散が (5), (6) で与えられる平均ゼロのガウス過程を各々構成しよう．実 Schwartz テスト関数の空間 $\mathscr{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^3)$ をノルム

$$\|f\|_{-1/2}^2 = \int |\hat{f}(k)|^2\frac{\mathrm{d}k}{|k|}$$

で完備化したものを $\mathscr{H}$, $\mathscr{S}_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^4)$ をノルム

$$\|f\|_{-1}^2 = 2\int |\hat{f}(\boldsymbol{k})|^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{|k|^2+|k_0|^2}$$

で完備化したものを $\mathscr{H}_E$ とかく．$\mathscr{H}$, $\mathscr{H}_E$ に測度を導入したいのだが，一般に実ヒルベルト空間上に測度を定義することはできない．

Minlos–Sazanov の定理：実ヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ 上の**正定符号関数**[*4] φ に対して $\mathscr{K}$ 上の有限ボレル測度 ρ で

$$\varphi(f) = \int_{\mathscr{K}} e^{i(f,\psi)_{\mathscr{K}}}\mathrm{d}\rho(\psi)$$

となるものが存在するための必要十分条件は φ が **Sazanov 位相**[*5] で連続となることである．

例えば $\varphi(f) = e^{-(f,Af)_{\mathscr{K}}}$ が Sazanov 位相で連続であるための必要十分条件は A が**核型作用素**であることである．もちろん $\mathscr{K}$ が無限次元のときは $A = I$ とはできない．実際 $\{g_n\}$ を完全正規直交基底とすれば

$$e^{-1} = \lim_n e^{-(g_n,g_n)} = \lim_n \int e^{i(g_n,\psi)}\mathrm{d}\rho = 1$$

となり矛盾してしまう．そこで $A = I$ となる測度を構成するためにヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ を膨らますことを考える．実際 **Bochner–Minlos の定理**により $\mathscr{S}'_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^3)$ 上にそのような測度の存在は保証されている．しかし $\mathscr{S}'_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^3)$ は大きすぎる．しかも $\mathscr{S}'_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^3)$ が**ポーランド空間**でないために $C(\mathbb{R};\mathscr{S}'_{\mathrm{real}}(\mathbb{R}^3))$ 上に測度を定義し難い[*6]．実は自己共役作用素 A を $A > 0$ で A^{-1} が**ヒルベルト・シュミッド型**作用素となるものとし $\mathscr{K}_A$ を $\mathscr{K}$ のノルム $\|A^{-1}\cdot\|_{\mathscr{K}}$ による完備化とすれば

$$e^{-(1/2)\|f\|_{\mathscr{K}}^2} = \int_{\mathscr{K}_A} e^{i\psi(f)}\mathrm{d}\rho_A(\psi)$$

$f \in \mathscr{K}, \psi \in \mathscr{K}_A$, となる測度 ρ_A がヒルベルト空間 $\mathscr{K}_A$ 上に存在することが示せる．ここで $\psi(f)$ について説明する．$\mathscr{K}_A$ の位相で $\psi_n \to \psi$ となる列 $\psi_n \in \mathscr{K}$ をとってきて $f \in D(A)$[*7] に対して $\psi(f) = \lim_n(A^{-1}\psi_n, Af)_{\mathscr{K}_A}$ と定める．$f \in \mathscr{K} \setminus D(A)$ に対しては極限操作で定義する．

以上説明したことを $\mathscr{H}$ と $\mathscr{H}_E$ に応用する．A は $A > 0$ で A^{-1} がヒルベルト・シュミッド型作用素であるとする．$\mathscr{H}_A$ 上の測度 μ で

$$e^{-(1/4)\|f\|_{\mathscr{H}}^2} = \int_{\mathscr{H}_A} e^{i\psi(f)}\mathrm{d}\mu, \quad f \in \mathscr{H}$$

となるものが存在する．ガウス型確率変数 $\psi(f)$ の

---

*4) $\sum_{i,j=1}^n \varphi(f_i - f_j)\bar{z}_i z_j \geq 0$ が任意の $z_j \in \mathbb{C}$ と任意の $f_j \in \mathscr{K}$ に対して成り立つ．

*5) $p_A(f) = (f, Af)_{\mathscr{K}}^{1/2}$ とする．$\mathscr{I} = \{p_A | A \geq 0, A$ は核型作用素$\}$ とおく．セミノルム $\mathscr{I}$ から定まる局所凸位相を Sazanov 位相と言う．

*6) 可分な完備距離空間をポーランド空間と言う．ポーランド空間 $\mathscr{K}$ に consistency 条件をみたす確率測度が定義されていれば $\mathscr{K}^{\mathbb{R}} = \{w : \mathscr{K} \to \mathbb{R}\}$ 上にも確率測度を定義することができる．

*7) $D(A)$ は A の定義域を表す．

平均はゼロで共分散は $\mathrm{E}_\mu[\psi(f)\psi(g)]=\frac{1}{2}(f,g)_{\mathscr{H}}$ となる．ゆえに $\mathscr{F}$ から $L^2(\mathscr{H};\mathrm{d}\mu)$ への対応 $1_\mathrm{v}\mapsto 1$,

$$\Phi(\hat{f}_1)\cdots\Phi(\hat{f}_n)1_\mathrm{v}\longmapsto\psi(f_1)\cdots\psi(f_n)$$

はユニタリーになるから，この対応によって $\mathscr{F}$ と $L^2(\mathscr{H}_A;\mathrm{d}\mu)$ を同一視する．同様に Minlos–Sazanov の定理より $\mathscr{H}_{E,A}$ 上に

$$e^{-(1/4)\|f\|^2_{\mathscr{H}_E}}=\int_{\mathscr{H}_{E,A}}e^{i\phi_E(f)}\mathrm{d}\mu_E,\quad f\in\mathscr{H}_E$$

となる測度 μ_E とガウス型確率変数 $\phi_E(f)$ が存在する．$f\in\mathscr{H}$ ならば $\delta_t\otimes f\in\mathscr{H}_E$ に注意して $\phi_E(\delta_t\otimes f)=\phi_t(f)$ とおけば，その共分散 $\mathrm{E}_{\mu_E}[\phi_t(f)\phi_s(g)]$ は (6) に等しくなるから $t_1<\cdots<t_n$ に対して再び Minlos–Sazanov の定理から次のような測度 $\nu_{t_1,\cdots,t_n}$ が積空間 $\times^n\mathscr{H}_A=\mathscr{H}_A^n$ 上に存在することが分かる：

$$\mathrm{E}_{\mu_E}[F(\phi_{t_1}(g_1)\cdots\phi_{t_n}(g_n))]$$
$$=\int_{\mathscr{H}_A^n}F(\psi^1(g_1),\cdots,\psi^n(g_n))d\nu_{t_1,\cdots,t_n}\quad(7)$$

測度族 $\{\nu_{t_1,\cdots,t_n}\}$ に対して **Kolmogorov の拡張定理**から **$\mathscr{H}_A$-値連続パス空間** $\Omega_\mathrm{f}=C(\mathbb{R};\mathscr{H}_A)$ 上に測度 ν と $\mathscr{H}_A$-値ガウス型確率過程 $(\xi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ でその有限次元分布 $\mathrm{E}_\nu[F(\xi_{t_1}(g_1)\cdots\xi_{t_n}(g_n))]$ が (7) で与えられるものが存在する*8)．ここで $\xi_t(f)=(\xi_t,f)_{\mathscr{H}_A}$ である．まとめると Ω_f 上に確率測度 ν と $\mathscr{H}_A$-値ガウス型確率過程 $(\xi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ が存在して，それは平均ゼロで共分散 $\mathrm{E}_\nu[\xi_t(f)\xi_s(g)]$ は (6) で与えられる．$(\xi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を**無限次元 OU-過程**と言う．

簡単な例を示そう．$H=H_\mathrm{f}+\Phi(\hat{h})$ が生成する熱半群は次のように積分表示できる：

$$(F,e^{-tH}\Psi)=\mathrm{E}_\nu\left[\overline{F(\xi_0)}e^{-\int_0^t\xi_s(h)\mathrm{d}s}G(\xi_t)\right].$$

特に $h=0$ とすれば ξ_t の生成子が H_f であることも確認できる．

*8) 正確に述べれば，$\mathscr{H}_A$ はポーランド空間なので $\mathscr{H}_A^\mathbb{R}$ 上に確率測度と確率過程 $w\mapsto w(t)$ が構成できる．その確率過程が連続修正をもつことを示す．その Ω_f への分布が ν である．

4. スカラー場の模型

1964 年[5)], E. Nelson は紫外切断を簡単な繰り込みによって外せる模型を導入した．それは今日 **Nelson 模型**と呼ばれ，最も単純な解けない模型の一つである．そのハミルトニアンは g を結合定数として $L^2(\mathbb{R}^3_x)\otimes\mathscr{F}$ 上の自己共役作用素

$$H(g)=H_\mathrm{p}\otimes 1+1\otimes H_\mathrm{f}+g\Phi(\hat{\rho}_x)$$

で定義される．テスト関数は

$$\hat{\rho}_x(k)=e^{-ikx}\times\begin{cases}0, & |k|<\kappa,\\ 1/(2\pi)^{3/2}, & \kappa\le|k|\le\Lambda,\\ 0, & |k|>\Lambda\end{cases}$$

である．κ は**赤外切断**, Λ は**紫外切断**を表す．$H(g)$ の基底状態の存在・非存在を考えよう．$g=0$ のとき $H(0)$ の基底状態は $\varphi_\mathrm{p}\otimes 1_\mathrm{v}$ である．ところが $H(0)$ のスペクトルは図 2 のように，下限の点スペクトルが連続スペクトルに埋め込まれているために $g\neq 0$ のとき，その点スペクトルが $H(g)$ の基底状態として生き残れるかどうか自明ではない．実は，ある条件下で下限点は摂動を加えても

図 2　$H(0)$ のスペクトル．

実軸上に留まるが，それ以外の埋め込まれた固有値は実軸から消え去ることが証明されている．さらにこの消えた固有値は**共鳴極**という複素下半平面上のある有理型関数の特異点になることもわかっている．これは離散固有値（図 3）が小さな摂動に対しては固有値であり続けるという摂動理論の一般論と大きく異なる．

図 3　離散固有値．

上で述べた**埋蔵固有値の摂動問題**を解決する一つの方法が確率論的なアプローチである．汎関数積分表示を応用することにより $\kappa>0$ のとき任意の g に対して $H(g)$ の基底状態の存在を簡単に示すことができる．これは結合定数の大きさや，その他のパラメターに全くよらない非摂動的な結果

である．さらに確率論的なアプローチでは，観測量の期待値を通して基底状態の性質を調べることができる．ここで述べた“基底状態の存在”というのは構成的なものではなく，単なる存在定理である（といっても存在を示すのは難しい場合がほとんどである）．そのため基底状態の性質を調べることは容易なことではない．実際，基底状態がまとうボゾンの個数期待値を評価することは関数解析的手法だけでは困難を極める．しかし確率論的アプローチでは $\kappa \to 0$ の極限で基底状態のボゾンの個数期待値が発散すること，そして $\kappa = 0$ のときに基底状態が存在しないことが容易く示せる．これは赤外発散により基底状態が無数のボゾンの雲に覆われ，その結果基底状態が存在し得なくなるという物理的描像の数学的に厳密な証明にもなっている．

このように確率論的なアプローチは非摂動論的であり，また非構成的なものを測度論的観点から解析できるという側面も持っているのである．以下，スカラー場の模型で上述したことを見てみよう．

5. 基底状態

（汎関数積分表示） $H(g)$ をユニタリー変換して $L^2(\mathbb{R}^3;\varphi_{\mathrm{p}}^2\mathrm{d}x)\otimes L^2(\mathscr{H}_A;\mathrm{d}\mu)$ 上の作用素

$$L_{\mathrm{p}}\otimes 1 + 1\otimes H_{\mathrm{f}} + g\psi(\rho_0(\cdot - x))$$

と同一視し，その汎関数積分表示を考える．粒子 L_{p} の部分は $\mathrm{p}(\phi)_1$-過程 q_t，量子場 H_{f} の部分は無限次元 OU-過程 ξ_t で表せることは既に説明した（表 1）．相互作用系では **$\mathbb{R}^3\times\mathscr{H}_A$ に値をとるパス空間** $\mathscr{C} = C(\mathbb{R};\mathbb{R}^3\times\mathscr{H}_A)$ 上の測度 $\mathscr{P}_0 = \mathscr{N}\otimes\nu$ と $\mathbb{R}^3\times\mathscr{H}_A$-値確率過程 (q_t,ξ_t) が必要であることは $H(g)$ の形から想像できるだろう（表 2）．実際 $(F, e^{-tH(g)}G)$ の積分表示は

$$\int_{\mathscr{C}} \overline{F(q_0,\xi_0)}G(q_t,\xi_t)e^{-g\int_0^t \xi_s(\rho(\cdot - q_s))\mathrm{d}s}\mathrm{d}\mathscr{P}_0 \tag{8}$$

で与えられる．

表 1　パス空間とパス測度．

	粒子	量子場
状態空間	$L^2(\mathbb{R}^3;\varphi_{\mathrm{p}}^2\mathrm{d}x)$	$L^2(\mathscr{H}_A;\mu)$
パス空間	$\Omega = C(\mathbb{R};\mathbb{R}^3)$	$\Omega_{\mathrm{f}} = C(\mathbb{R};\mathscr{H}_A)$
パス測度	$\mathscr{N}$	ν
確率過程	$\mathrm{p}(\phi)_1$-過程 q_t	∞ 次元 OU-過程 ξ_t
生成子	L_{p}	H_{f}

表 2　相互作用系のパス空間とパス測度．

	相互作用系
状態空間	$L^2(\mathbb{R}^3;\varphi_{\mathrm{p}}^2\mathrm{d}x)\otimes L^2(\mathscr{H}_A;\mu)$
パス空間	$\mathscr{C} = C(\mathbb{R};\mathbb{R}^3\times\mathscr{H}_A)$
パス測度	$\mathscr{P}_0 = \mathscr{N}\otimes\nu$
確率過程	(q_t,ξ_t)
生成子	$L_{\mathrm{p}}\otimes 1 + 1\otimes H_{\mathrm{f}}$

（判別方法） 汎関数積分表示 (8) を眺めてすぐに分かることは恒等的にゼロにならない $F\geq 0$, $G\geq 0$ に対して $(F, e^{-tH(g)}G) > 0$ となることである．これから有限次元の **Perron–Frobenius の定理**と同様に $H(g)$ の基底状態 φ_{g} は存在すれば一意であることがわかる．これは，基底状態があればいつでも正にとれるという事実から従う．特に $(1,\varphi_{\mathrm{g}}) > 0$ となる．基底状態の存在・非存在証明に関する基本的な事実を紹介しよう．まず，

$$\varphi_{\mathrm{g}}^T := e^{-TH(g)}1/\|e^{-TH(g)}1\|,\quad T>0$$

とおく．もし基底状態 φ_{g} が存在すれば $(1,\varphi_{\mathrm{g}}) > 0$ なのだから $\varphi_{\mathrm{g}}^T \to \varphi_{\mathrm{g}} (T\to\infty)$ となる．つまり φ_{g}^T は基底状態の近似列になっている．

$$\mathscr{V}(T) = (1,\varphi_{\mathrm{g}}^T)^2 = \frac{(1,e^{-TH(g)}1)^2}{(1,e^{-2TH(g)}1)}$$

とおく．$T\to\infty$ のとき次が成り立つ．

1. $\mathscr{V}(T) \to \exists a > 0$ ならば基底状態が存在する．
2. $\mathscr{V}(T) \to 0$ ならば基底状態が存在しない．

$\mathscr{V}(T)$ を汎関数積分表示して $T\to\infty$ の挙動を調べよう．$F = f\otimes 1$, $G = g\otimes 1$ とすれば ν 積分が計算できて

$$(F, e^{-2tH(g)}G) = \mathrm{E}_{\mathscr{N}}\left[\overline{f(q_{-t})}g(q_t)e^{S_{[-T,T]}}\right]$$

となる．ここで

$$S_{[a,b]} = \frac{g^2}{2}\int_a^b \mathrm{d}s \int_a^b \mathrm{d}r W(s-r, q_s - q_r)$$

で，その被積分関数

$$W(T,X) = \int \frac{|\hat{\rho}_0(k)|^2}{|k|} e^{-ikX} e^{-T|k|}\mathrm{d}k$$

は Feynman–Kac の公式に現れた $\int_0^t V(B_s)\mathrm{d}s$ と対比させて**2 重ポテンシャル**と呼ばれる．次の積分は場の量子論において基底状態の存在・非存在を決定する重要な量である：

$$\mathscr{R} := \int \frac{|\hat{\rho}_0(k)|^2}{|k|^3}\mathrm{d}k.$$

次元が 3 次元なので

$$\mathscr{R} < \infty \ (\kappa > 0), \quad \mathscr{R} = \infty \ (\kappa = 0)$$

となることに注意する．$\mathscr{R} < \infty$ を**赤外正則条件**と言う．2 重ポテンシャルの T とパスに一様な評価

$$\left|\int_{-T}^0 \mathrm{d}s \int_0^T \mathrm{d}r W(s-r, q_s - q_r)\right| \leq \mathscr{R} \tag{9}$$

を以下の証明で本質的に使う．

（存在） $\kappa > 0$ のとき基底状態が存在することを示そう．$\mathrm{Spec}(H_\mathrm{p}) = \{e_j\}_{j=0}^\infty$ と仮定する．H_p のスペクトル測度を λ で表し，$P_{\mathscr{F}}$ を 1_v への射影作用素とすれば $K = \lambda_{[e_0,\Sigma]} \otimes P_{\mathscr{F}}$ は**コンパクト作用素**となり $K\varphi_\mathrm{g}^T$ は部分列をとれば強収束する．その部分列を改めて φ_g^T とおく．

$$A = \frac{(e^{-TH}1, (e^{-tH_\mathrm{p}} \otimes P_{\mathscr{F}})e^{-TH}1)}{(1, e^{-(2T+t)H}1)},$$

$$B = \frac{(1, e^{-(2T+t)H}1)}{(1, e^{-2TH}1)}$$

とおけば $(\varphi_\mathrm{g}^T, (e^{-tH_\mathrm{p}} \otimes P_{\mathscr{F}})\varphi_\mathrm{g}^T) = AB$ と分解できる．これを下から T について一様に評価して φ_g^T がゼロに弱収束しないこと，つまり $K\varphi_\mathrm{g}^T$ がゼロに強収束しないことを証明するというのがアイデアである．Fock 真空への射影がゼロに収束しないことを言えば十分なのだが，敢えて $e^{-tH_\mathrm{p}} \otimes P_{\mathscr{F}}$ の期待値を考えるのがこの証明のミソで，その理由は Feynman–Kac の公式を使って

$$A = \mathrm{E}_{\mathscr{N}}[e^{S_{[0,T]}+S_{[T+t,2T+t]}}]/\mathrm{E}_{\mathscr{N}}[e^{S_{[0,2T+t]}}]$$

と汎関数積分表示できることにある．$\mathscr{R} < \infty$ と (9) より分子は

$$S_{[0,T]} + S_{[T+t,2T+t]} \geq -l(t) + S_{[0,2T+t]}$$

と下から評価できる．ただし $l(t)$ はパスによらず $0 < l(t)/t \leq$ 定数をみたす．A の分母と比べて，$A \geq e^{-l(t)}$ がわかる．一方 $\lim_T B = e^{-tE_g}$, $E_g = \inf \mathrm{Spec}(H(g))$, なので結局

$$\liminf_T AB \geq e^{-tE_g}e^{-l(t)}$$

となるから，

$$\liminf_T (\varphi_\mathrm{g}^T, K\varphi_\mathrm{g}^T) \geq (e^{-tE_g}e^{-l(t)} - e^{-t\Sigma})e^{te_0}$$

と下から評価できる．Σ を十分に大きくとれば右辺が正になるので，φ_g^T はゼロに弱収束しない．ゆえに $\lim_T \mathscr{V}(T) > 0$ となり基底状態の存在が示せた．

（非存在） 次に $\kappa = 0$ のとき基底状態が存在しないことを示そう．パス空間 $\mathscr{C}$ 上の確率測度を

$$\mathrm{d}\mathscr{P}_T = Z_T^{-1} e^{-g\int_{-T}^T \xi_s(\rho_0(\cdot - q_s))\mathrm{d}s}\mathrm{d}\mathscr{P}_0$$

で定義すれば $(\varphi_\mathrm{g}^T, f\varphi_\mathrm{g}^T) = \mathrm{E}_{\mathscr{P}_T}[f(q_0, \xi_0)]$ となる．ここで Z_T は正規化定数である．確率変数 (q_0, ξ_0) の $\mathscr{P}_T$ に関する $\mathbb{R}^3 \times \mathscr{H}_A$ 上の分布を P_T と書けば，P_T が，ある確率測度 P へ弱収束することが示せる．さらに $\kappa = 0$ のとき P_0 に関して至る所 $F > 0$ だが $\mathrm{E}_\mathrm{P}[F] = 0$ となる $\mathbb{R}^3 \times \mathscr{H}_A$ 上の関数 F を構成できる．つまり P_0 と P が**互いに特異な測度**であることがわかる．$\lim_T \mathrm{E}_{\mathrm{P}_0}[(\varphi_\mathrm{g}^T)^2 F] = \mathrm{E}_\mathrm{P}[F] = 0$ と Schwartz の不等式から

$$\mathscr{V}(T) = (1, \varphi_\mathrm{g}^T)^2 \leq \mathrm{E}_{\mathrm{P}_0}[(\varphi_\mathrm{g}^T)^2 F]\mathrm{E}_{\mathrm{P}_0}[F^{-1}] \to 0$$

となるので基底状態は存在しないことがわかる．

6. 無限体積ギブス測度と赤外発散

φ_g に関する期待値を $\langle T\rangle = (\varphi_g, T\varphi_g)$ で表す．$\kappa > 0$ と仮定して，$\kappa \to 0$ のときの基底状態のボゾンの個数期待値の挙動を汎関数積分を使って調べよう．$\{\Psi\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}$ に対して，$N\Psi_n(k_1, \cdots, k_n) = n\Psi_n(k_1, \cdots, k_n)$ で定義される作用素 N を個数作用素と言う．$\mathscr{P}_T$ を Ω_f 上で積分して Ω 上の確率測度 $\mathscr{N}_T$ を定義する：

$$\mathrm{d}\mathscr{N}_T = \int_{\Omega_f} \mathrm{d}\mathscr{P}_T = Z_T^{-1} e^{S_{[-T,T]}} \mathrm{d}\mathscr{N}.$$

$\mathscr{N}_T$ は弱収束する部分列をもつことが示せる．その極限を $\mathscr{N}_\infty$ とおき，**無限体積ギブス測度**と言う．$\beta > 0$ として $(\varphi_g^T, e^{-\beta N}\varphi_g^T)$ は

$$\mathrm{E}_{\mathscr{N}_T}\left[e^{-\frac{g^2}{2}(1-e^{-\beta})\int_{-T}^{0}\mathrm{d}s\int_0^T \mathrm{d}r W(s-r, q_s-q_r)}\right] \tag{10}$$

のように表示できる．赤外正則条件 $\mathscr{R} < \infty$ と (9) から $\kappa > 0$ のときは，(10) の被積分関数はパスと時間 T に一様に有界であるから $T \to \infty$ の極限をとれば $\langle e^{-\beta N}\rangle$ の積分表示が

$$\mathrm{E}_{\mathscr{N}_\infty}\left[e^{-\frac{g^2}{2}(1-e^{-\beta})\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}s\int_0^\infty \mathrm{d}r W(s-r, q_s-q_r)}\right] \tag{11}$$

となる．パス w ごとに **intensity** が

$$\Gamma = \frac{g^2}{2}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}s\int_0^\infty \mathrm{d}r W(s-r, q_s-q_r)$$

の**ポアソン過程**が被積分関数に現れるのが特徴である．つまりパス w ごとのポアソン過程 Y_w で $\langle e^{-\beta N}\rangle = \mathrm{E}_{\mathscr{N}_\infty}\left[\mathrm{E}\left[e^{-\beta Y_w}\right]\right]$ と表せたことになる．これは美しい！ ちなみに $|\Gamma| \le (g^2/2)\mathscr{R}$ である．

この $\beta \ge 0$ を複素平面全体 $\mathbb{C}$ に解析接続できることは，$\mathscr{N}_\infty$ が確率測度なので容易に示せる．これから任意の $\beta \in \mathbb{C}$ で，$\varphi_g \in D(e^{-\beta N})$ が示せ，かつ $\langle e^{-\beta N}\rangle$ の積分表示も (11) で与えられることがわかる．これは基底状態のボゾンの個数期待値が指数的に減衰することを主張している．$g = 0$ のときの基底状態 $\varphi_p \otimes 1_v$ のボゾンの個数期待値がゼロであることを考えれば理解しやすい．さて，$\beta = 0$ で (11) の右辺が無限回微分可能であるから n 次モーメント $\langle N^n\rangle = (-1)^n \mathrm{d}^n\langle e^{-\beta N}\rangle/\mathrm{d}\beta^n\lceil_{\beta=0}$ の積分表示を得ることができる．特に intensity Γ によって

$$\langle N\rangle = \mathrm{E}_{\mathscr{N}_\infty}[\Gamma]$$

と表せる．これから容易に $a, b > 0$ で

$$a\mathscr{R} - b \le \langle N\rangle \le \mathscr{R}$$

となるものが存在することが分かる．$\kappa \to 0$ の極限をとると，$\mathscr{R} \to \infty$ なので，上の不等式から $\langle N\rangle \to \infty$ がわかる．これはまさに $\kappa \to 0$ の赤外発散により基底状態がまとうボゾンの個数期待値が無限大になるということの数学的な表現になっている．

7. おわりに

この論説では場の量子論における確率論的手法の一部を紹介した．最も重要な概念である基底状態の解析にはそれが埋蔵固有値であるがゆえに一般的な摂動理論を放棄せざるを得ないという事情がある．強調しておきたいことは確率論的な解析が非摂動的であるということである．ここに紹介した結果の詳細は文献 1, 4, 10) にある．文献 9) はスピン・ボゾン模型の基底状態を汎関数積分を使って解析した記念碑的な論文である．内容は深く，重厚で，今でも読み返すとハッとさせられてしまうことがある．文献 7, 8, 12) にも大変美しい汎関数積分的アプローチがある．また無限体積ギブス測度の存在に関しては文献 6) がある．

文献 10) にある**基底状態の非摂動的な基底状態の存在証明**は筆者の知る限り Spohn が最初だと思う．いつもは自分の結果に淡白な Spohn であるが，その証明の詳細を親切にも筆者に説明してくれたときは，やや興奮気味に例の早口で「汎関数積分の勝利だ！」とこぶしを突き上げたのが鮮やかな印象として残っている．その後，基底状態の

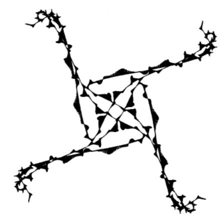
存在・非存在に関しては別証明が数多く発見されて現在に至っている．興味のある読者は文献 11) の膨大な参考文献を参照されたい．

参考文献

1) V. Betz, F. Hiroshima, J. Lőrinczi, R. Minlos and H. Spohn, Ground state properties of a particle coupled to a scalar field, *Rev. Math. Phys.* **14** (2002), 173–198.
2) 一瀬孝，経路積分，数理科学 4 月号，32–38, 2008.
3) 伊東恵一，構成的場の理論の軌跡と展望，「現代数理物理の展開」(別冊・数理科学)，126–134, 2003.
4) J. Lőrinczi, R. Minlos and H. Spohn, The infrared behavior in Nelsons model of a quantum particle coupled to a massless scalar field, *Ann. Henri Poincare* **3** (2002), 1–28.
5) E. Nelson, Interaction of nonrelativisitic particles with a qautized scalar field, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 1190–1197.
6) H. Osada and H. Spohn, Gibbs measures relative to Brwonian motion, *Ann. Probab.* **27** (1999), 1183–1207.
7) H. Spohn, Effective mass of the polaron: A functional integral approach, *Ann. Phys.* **175** (1987) 278–318.
8) H. Spohn, The polaron at large total momentum, *J. Phys. A. Math. Gen.* **21** (1988), 1199–1211.
9) H. Spohn, Ground state(s) of the spin-boson Hamiltonian, *Commun. Math. Phys.* **123** (1989), 277–304.
10) H. Spohn, Ground state of a quantum particle coupled to a scalar field, *Lett. Math. Phys.* **44** (1998), 9–16.
11) H. Spohn, *Dynamics of charged particles and their radiation field*, Cambridge Univ. Press. 2004.
12) H. Spohn, R. Stückl and W. Wresinski, Localisation for the spin J-boson Hamiltonian, *Ann. Inst. Henri. Poincaré* **53** (1990), 225–244.

（ひろしま・ふみお，九州大学大学院数理学研究院）

ランダム系のスペクトル



南　就将

今からちょうど50年前，物理学者アンダーソン[1)]は離散的な空間格子の点（サイト）の間を移り歩く量子力学的粒子を記述するモデル（**tight binding model**）で，系自体が**乱れ**（**disorder, randomness**）を含むものを考えた．そのハミルトニアン

$$h = \sum_{x,y} \epsilon_{xy} |x\rangle\langle y| + \sum_{x} v_x |x\rangle\langle x|$$

において ϵ_{xy} は x と y とが最近接格子点のときは $\epsilon_{xy} = \epsilon > 0$，それ以外の場合は $\epsilon_{xy} = 0$ であり，また v_x たちは区間 $[-W, W]$ において一様分布に従って互いに独立にランダムな値をとる．時刻 t での波動関数を $\psi_t = \{\psi_t(x)\}_x$ とすると，その時間発展はシュレーディンガー方程式 $i\frac{d}{dt}\psi_t = h\psi_t$ により記述される．ただし

$$h\psi_t = \sum_{x,y} \epsilon_{xy} \psi_t(y) |x\rangle + \sum_{x} v_x \psi_t(x) |x\rangle$$

である．h は言いかえると，ラプラス作用素 + ポテンシャル（$-\Delta + V$）で定義される**シュレーディンガー作用素**を離散化したものに他ならない．アンダーソンはハミルトニアン h に内在する乱れの影響により，時刻 $t = 0$ においてサイト x に集中した波動関数 ψ_t は $t \to \infty$ においてもやはりサイト x の近傍に集中していること（いわゆる**アンダーソン局在**）を「定理」として主張した．

アンダーソンの論文はその後のランダム系の研究に必ずといってよいほど引用される有名なものだが，残念ながら筆者は何度読み返しても理解できなかった．上記の要約にも少々無理があることをお断りしておく．ただ，アンダーソンが彼の結果を「定理」と称しているのはおもしろい．論文の冒頭から引用すると，彼の意図は「現実の物理的な状況をある程度反映しながら，考え得る限り単純なモデルについて（上記の）定理を証明し」，そうすることにより輸送問題の量子力学的理論の基礎を与えることであった．

乱れを含む量子力学系がアンダーソン局在を示すという予想は直ちには信用されなかったが，その後 Mott, Twose, Borland 等が別の議論に基づいて主張するに至って徐々に固体物理学者の共通認識になっていったようである．それが数学的な意味での真の定理となったのは約20年後，旧ソ連の3人の数学者 Goldsheid, Molchanov, Pastur の論文[2)]においてであった．彼らはコンパクトなリーマン多様体上のブラウン運動という特殊な確率過程から作られる有界かつランダムなポテンシャルを持つ1次元のシュレーディンガー作用素 $H = -d^2/dx^2 + V(x)$ が確率1で稠密な点スペクトルのみを持つことを証明した．ここで**点スペクトル**というのは H の固有値，すなわち方程式 $H\psi = \lambda\psi$ が $\psi \neq 0$ かつ $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty$ となる解（固有関数）を持つような数 λ のことである．固有値は高々可算個しかない．これに対し，λ が**連続スペクトル**に属する場合も方程式 $H\psi = \lambda\psi$ は解けるが，$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx$ は無限大になってしまう．H が規則的な金属結晶中の電子を表す場合のように $V(x)$ が周期的な関数である場合は H は連続スペクトルを持つ．一方 H が調和振動子を表す場合のように $V(x) \to +\infty$ $(x \to \pm\infty)$ となる場合には H は点スペクトルのみを持つが，その固有値は $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ のように間をおいて現れる．ところが Goldsheid 等の結果によればランダムなポテンシャルを持つ H の点スペクトルは（あたか

も実数の中の有理数のように）実数直線のある範囲をびっしりと埋めつくし，しかもその点スペクトルはランダムな $V(x)$ のサンプルごとに揺らいでおり，数 λ をあらかじめ指定してしまうと λ が H の固有値である確率はゼロなのである．これは予想外にデリケートな，新しい数学的現象の発見であり，関連分野の研究者たちに衝撃を与えた．一方，冒頭に述べた意味でのアンダーソン局在が，H が点スペクトルのみを持つこと（連続スペクトルの不在）とほぼ同値であることは Ruelle の定理[3]からわかる．また Molchanov は数年後に単独の論文において H の固有関数が無限遠方で指数関数的に減衰することをも証明している[4]．

Goldsheid 等の議論は微分方程式論，実解析，確率論の様々な技巧を駆使しながら，詳細の記述がしばしば省略されたもので，証明の正しさを疑う人はいなかったであろうが，すべてにわたって理解した人も少なかったのではないかと思われる．筆者も大学院生の頃この論文を解読しようとしたがその難しさに閉口し，すぐに投げ出してしまった．その後 Carmona[5]により固有関数の減衰と連続スペクトルの不在とを同時に示す新しい証明が考案され，また小谷眞一氏のアイディア[6]によりその証明はさらに簡略化された．その一方で，アンダーソンがもともと考えていた多次元の tight binding model に対しても連続スペクトルの不在という意味でのアンダーソン局在が厳密に証明できないかということが改めて問題となったが，それは 1985 年になって B. Simon, B. Souillard および J. Fröhlich をそれぞれ中心とする 3 つのグループによりほぼ同時に解決されてしまった[7]．3 つの証明のうち 2 つには前述した小谷氏のアイディアが活かされている．さらに多次元のランダムなシュレーディンガー作用素 $-\Delta+V(x_1,\cdots,x_d)$ に対してもアンダーソン局在が証明されており[8]，今日ではアンダーソン局在の厳密な証明は種々のランダム系モデルに対して成功している．

もっとも現状ではモデルが与えられるごとに証明をやり直すことが多く，アンダーソン局在に関する数学的な一般論（そんなものが可能だとして）が完成したわけではなさそうである．また**輸送現象の量子力学的理論の基礎づけ**というアンダーソンの意図は達成されたのであろうか．Klein 等の最近の研究[9]はその方向を目指しているといえるのだが，**数理物理学者**と**固体物理学者**の間に対話が成立するためにはまだ克服すべき課題が多いように思うのである．

参考文献

1) P.W. Anderson: Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.* **109**, 1492–1505 (1958).
2) I. Ya. Goldsheid, S.A. Molchanov, L. Pastur: A pure-point spectrum of the stochastic one-dimensional Schrödinger equation. *Funct. Anal. Appl.* **11**, 1–8 (1977).
3) D. Ruelle: A remark on bound states in potential scattering theory. *Nuovo Cimento* **61A**, 655–662 (1969).
4) S.A. Molchanov: The structure of eigenfunctions of one dimensional unordered structure. *Math. USSR Izvestija* **12**, 69–101 (1978).
5) R. Carmona: Exponential localization in one dimensional disordered systems. *Duke Math. J.* **49**, 191–213 (1982).
6) S. Kotani: Lyapunov exponents and spectra for one-dimensional random Schrödinger operators. *Contemporary Math.* **50**, 277–286, (1986).
7) R. Carmona, J. Lacroix: *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators.* Birkhäuser (1990).
8) P. Stollmann: *Caught by Disorder.* Birkhäuser (2001).
9) A. Klein, O. Lenoble, P. Müller: On Mott's formula for the ac-conductivity in the Anderson model. *Ann. Math.* **166**, 549–577 (2007).

（みなみ・なりゆき，慶應義塾大学医学部）

名著に親しむ

——特集から広がる読書案内——

今野　紀雄

複雑ネットワーク上の無限粒子系へ

私の専門分野の一つである**無限粒子系**という視点から，本文では T.M. Liggett の著書を主に，幾つかの本を紹介していきたい．最後に，近年様々な分野より着目を浴びている**複雑ネットワーク**との関連についても多少触れたい．このような視点からの記述は，通常の統計物理学からの視点に比べると，あまり一般的ではないかもしれないが，逆に示唆的であろう．

無限粒子系とは，無限個（広く有限個の場合も含める）の各粒子が確率的に相互作用しながら時間発展する確率過程である．以下，簡単に無限粒子系の歴史的な流れを押さえながら，書き進める．無限粒子系は確率論の一分野として，1960 年代後半から，主に Spitzer や Dobrushin により研究され始めた．その背景の一つには，統計物理学で研究されていたモデル，例えば，イジング模型に代表されるように，その**相転移現象**の詳細を理解したいということが目的としてあった．その後，似たような相転移現象が，伝染病の広がり，交通流，生態系など様々な現象にも見られる，という知見が蓄積するにつれ，無限粒子系としてのモデルとその解析手法も多様性を帯びてきた．それと同時に無限粒子系を研究する研究者たちの分野のすそ野も大きく広がっていった．

無限粒子系の最初の本格的な教科書『Interacting Particle Systems』は，右ページでも紹介するが，1985 年，その分野の第一人者である，Liggett の手によって著された．この本は 488 ページにも及ぶ大著で，その当時までによく研究されていた代表的なモデルが，第 3 章までの数学的な準備の後，丁寧に解説されている．以下，参考のために扱われているモデルを記しておこう．イジング模型（第 4 章），投票者モデル（第 5 章），コンタクト・プロセス（第 6 章），最近接粒子系（第 7 章），排他過程（第 8 章），線形系（第 9 章）．実は，出版前の原稿を大学院生時代に読んだ懐かしい記憶がある．この本によって，論文によって異なり読みづらかった様々な記法も統一され，また諸結果も整理されると共に，未解決問題も明らかになり，以後多くの関連の研究が加速され，新たな研究者の参入ももたらした．この本の特徴は数学の記述に絞り，特に物理など応用についての詳述はなく，ある意味辛口の味わいがある．逆に「色」がついていない分，物理や生物などの応用を考える場合に役に立つように思う．

さて約 15 年後の 1999 年に同じく Liggett により，さらに上級者向けの本『Stochastic Interacting Systems』（332 ページ）が著された．そこで扱われているモデルは，前著で扱われたモデルのうち，1985 年から 1999 年の間に最もよく研究された下記の 3 つである．コンタクト・プロセス（パート I），投票者モデル（パート II），排他過程（パート III）．この本も出版前に，Liggett 氏を訪問した際に読む機会を得て，不思議な縁を感じる．

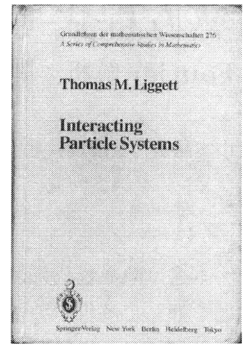
これら 2 冊の本に渡り，今もって謎の部分の一つは，前著第 6 章で解説されている（1 次元コンタクト・プロセスの臨界値の非常に良い上限を与える），所謂 Holley–Liggett 法がどうして上手くいくのか，直感的に全く分からないことである．この更新測度に基づく手法は，新しい本のパート II でも重要な役割を担っている．前述の訪問の際，意を決して Liggett 氏に直接聞いたことがあるが，逆に問い返されてしまい，謎が謎として残ったままの状態である．

複雑ネットワークという流れでみると，例えばコンタクト・プロセスの場合，1985 年の時点では $\boldsymbol{d}$ **次元超立方格子**上が主であったが，1999 年の本では**ツリー**上も詳しく扱われている．その理由は，1992 年に Pemantle が $\boldsymbol{d}$ **次元超立方格子**では現れなかった相転移現象が**ツリー**では新たに現れることを示したからだ．当時はまだ現在のような複雑ネットワークの研究は始まっていなかったが，無限粒子系の分野でその予兆を感じさせるような先駆的な研究であった．ごく最近では，シミュレーションや近似を用いた複雑ネットワーク上の無限粒子系，特にコンタクト・プロセスや投票者モデルの研究が統計物理学者を中心にされ始めている．本格的な数学の研究は，まだ始まったばかりである．

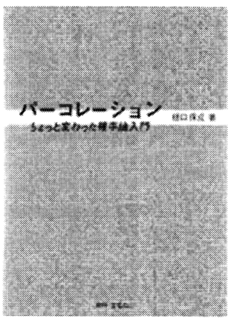
（こんの・のりお，横浜国立大学大学院工学研究院）

Interacting Particle Systems

T.M. Liggett, Springer, 1985 年



本文で紹介したが，この本は無限粒子系のバイブルであろう．またこちらも本文でふれたが，同著者による『Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes』(Springer, 1999) も併せて読まれると良い．絶版になってしまったが，シミュレーションの図も豊富な R. Durrett 著『Lecture Notes on Particle Systems and Percolation』(Wadsworth Inc., 1988) がある．そして最近同著者による複雑ネットワーク上の無限粒子系の本『Random Graph Dynamics』(Cambridge Univ. Press., 2006) が出版された．また，物理的な立場からは，J. Marro and R. Dickman 著『Nonequilibrium Phase Transitions and Critical Phenomena』(Cambridge Univ. Press., 1999) が定番である．



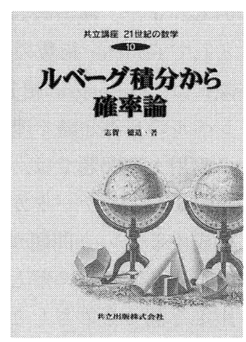
パーコレーション ちょっと変わった確率論入門

樋口保成，遊星社，1992 年

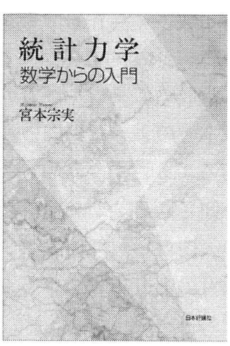
パーコレーション（浸透モデル）の数学的な基礎を学習するための本として，読まれ続けてきた本である．英語の本としては，1989 年に初版が出版され，第 2 版では 1.5 倍ほど分量が増えた G. Grimmett 著『Percolation』(Springer, 1999 第 2 版）の本格的なテキストがある．2 次元ボンドパーコレーションの臨界値を数学的に最初に求めた H. Kesten による『Percolation Theory for Mathematicians』(Birkhäuser, 1982) も味わい深い．

ルベーグ積分から確率論

志賀徳造，共立出版，2000 年



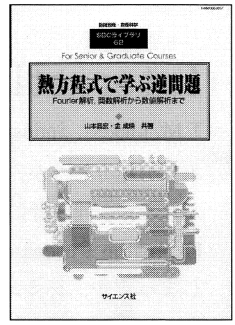
ルベーグ積分と確率論の基本的な事項の説明の後，ランダムウォークとそれと深い関係にある投票者モデルの解説がなされている類書無き本である．投票者モデルを含むクラスは，コンパクト有向パーコレーションの相転移普遍性を持つとも言われ，広範囲な分野で研究が行われている．同様に重要なものとして，コンタクト・プロセスに代表されるようなモデルのクラスがあり，一般に有向パーコレーションの相転移普遍性を持つクラスと言われる．この解説書として，拙著『無限粒子系の科学』（講談社，2008）がある．



統計力学 数学からの入門

宮本宗実，日本評論社，2004 年

『格子気体の相転移』(Seminar on Probability 38, 1973) の改訂版で，最終章では新たに相転移とパーコレーションの話題が加えられている古典の香り漂う本である．最後に解説されているモデルは，有向パーコレーションの相転移普遍性のクラスに属していると考えられている．また，今後の無限粒子系研究の一つの方向を示唆する興味深い未解決問題が本文最後の一文（p.109）で触れられている．是非挑戦されたい．



熱方程式で学ぶ逆問題

Fourier 解析，関数解析から数値解析まで

山本昌宏，金成煥共著，B5 判，104 頁，本体 1429 円，サイエンス社

本書は熱方程式における逆問題を題材にし，この問題を通じて解析学の基本を解説するという方法で書かれた解析学と逆問題の入門書である．本書の構成は以下のようになっている．

第 1 章　熱方程式
第 2 章　Fourier 級数による熱方程式の解法
第 3 章　関数解析からの準備
第 4 章　熱方程式の逆問題
第 5 章　正則化

第 1 章と第 2 章では，熱伝導現象を数理モデルで記述することから始め，熱方程式の基本的な性質と解法を解説している．現実の現象の解析においては，数学による解析の結果として得られる結論とその結論の現象における意味との関係を考える姿勢が非常に重要であるが，そのことにも十分に配慮された解説になっている．また，熱方程式の変数分離法による解法の道具として Fourier 級数の一般論を解説しているが，この解説には，Lebesgue 積分論の知識を仮定せず，一般教養レベルの基礎知識で理解できるように配慮されている．

実用上の問題では，数学的に解を求めるのみならず，誤差を含んだデータから得ようとしている解の近似を構成するという問題が頻繁に生じるが，これらの議論のためには本来の解と近似解を表現する関数どうしの距離を測るものさしと実際に近似解を構成するための道具が必要となる．第 3 章ではそれらの準備として関数解析の基本理論を紹介している．逆問題の解を数学的に求めることは重要ではあるが，これだけでは実用上の問題は必ずしも解決されない．この事実は多くの逆問題が持つ誤差に対する不安定性と呼ばれる特性によるが，第 4 章で本書の目的である熱方程式の逆問題の定式化を与え，その解法と逆問題における安定性・不安定性について解説を与えている．第 5 章では不安定逆問題において，誤差込みの観測データから近似解を構成するための一つの方法として，正則化法を解説している．第 4 章，第 5 章を通じて，逆問題における安定性・不安定性の記述とその解析において，関数解析の理解が重要であることが理解されるであろう．

正則化の手続きが得られることは，実用上の問題への応用に対して必ずしも十分ではない．正則化法は関数解析の枠組みで考えられることが多く，そこで用いられる誤差込みの観測データは関数（したがって連続無限データ）であるが，実用上の問題において実際に得ることができるのは有限個の誤差込みのデータのみであるため，有限個の誤差込みの観測データを用いて実用に耐え得る近似解を構成する有限離散化の手続きの確立とその実用へのフィードバックが重要になる．残念ながら，本書ではこれらの問題には言及されていない．著者たちは“あとがき”でこれらの問題の解説は本書の目的ではないと述べているが，これらの問題は，個々の逆問題に高度に依存することが多く，また，解析の手法には本書の趣旨と異なるものが多く含まれるため，割愛することもやむを得ないと言えよう．

本書の構成は，読者の好奇心をかき立て動機付けを行うという観点から非常に効果的であると思われる．現在，ほとんどの大学における数学教育のカリキュラムは基礎理論の解説を中心に構成されており，実用上の問題への応用は基礎理論の習得後に考えるというのが現状であると思われる．しかしながら，著者たちも“まえがき”で述べているように，本書の構成のように，まずは実用上の要請から生ずる問題を取り上げ，その問題をモデルとして記述し，解決するための道具として解析学の様々な基礎理論を習得するというような講義等が，教育現場にもっと数多く存在してもよいのではないだろうか．読者や聴講者の興味を惹きつけるという意味で，このような構成の教科書や講義の効果は大きいものと思われる．本書のような構成の書籍や講義等は徐々に増えつつあるようだが，今後，このような教育方法がより広く認知されることを期待したい．本書は解析学と逆問題の入門書として興味深いだけでなく，今後の解析学の教育のあり方についても考えさせられる一冊と言えるだろう．

滝口　孝志（防衛大学校数学教育室）



好きなことをしていたら

古 澤 明

1. はじめに

私は現在物理学者を職業としている．しかし，大学院の修士課程を修了し会社に就職するまで一度も，そうなることを夢想だにしなかった．未だにどうしてそうなったかよくわからない．そのような珍しい道を歩んできた私のこれまでを記すことにより，このような道もあるのだと世間に示すのも意味があると思いペンを取ることにした（今風に言うと「ワープロに向かうことにした」）．

2. 大学入学から会社就職まで

私は1980年に東京大学教養学部理科一類に入学した．当時はすでに現在のように学生運動もほとんどなく，極めて平穏な時代であったと思う．私も他のすべての人と同じように，受験勉強から解放された開放感と，これから始まるであろう輝ける大学生活に期待を膨らませていた．しかし，これもほとんどの人と同じように，瞬く間にマスプロ授業に辟易し，講義に出るのが苦痛になっていった．例外は，（ヨイショするわけではないが）米谷民明先生の力学と藤原正彦先生の線形代数であった．米谷先生の講義は，高校で断片的に学んだ力学を，極めてエレガントに体系立ててお話され，「さすが東大の先生は凄い」と感服させられたものであった．藤原先生の講義は，その内容よりも，折に触れて話される経験談やジョークがとても面白く，いつも講義に行くのが楽しみであった．また，藤原先生は当時すでに『若き数学者のアメリカ』（新潮社）で有名人であり，有名人に直接講義してもらえるというのはとてもうれしかった．私はそのうれしさを表現するのに，先生が教室に入ってこられる前に，黒板に「若き数学者のアメリカ」と大きく書いておいたことがあった．しかし，先生は入って来られるなりすぐに消し始め，さらに消し終わったらすぐに何事もなかったように講義を始められたのである．これは，今思い出しても非常に残念な思い出である．何でも良いから言ってほしかったのに…．教養時代の他の印象深い思い出としては，現在映画監督になった中田秀夫君と同じクラスだったため，一緒に映画を撮ったことが挙げられる．もちろん，彼が監督・脚本を引き受け，私はカメラマンだった．

専門課程は工学部物理工学科に進学した．進学した動機は，物理はやりたいと思ったが，理学部物理学科は素粒子・宇宙学科と読み替えても良いという認識だったので，そのいずれもあまりピンと来なかった私にはあまり魅力的に見えなかった．それで名前に「物理」が入っている物理工学科に進学することにしたのである．今でもそうである

が，物理工学科は計数工学科と共に応用物理系を名乗っており，物理以外にも回路学や制御論に興味を持っていた私には，それを専門とする計数工学科と近い関係にあることはとても魅力的であった．また，当時は思いもよらなかったが，この物理工学科への進学が，後の私へ決定的な強みを与えることとなった．

物理工学科に進学してからは，ごく普通の真面目な学生だったと言いたいところではあるが，実際は大学に入学してから始めた競技スキーが面白くなり，頭の中はそれで一杯の時期だったと思う．それでも，できるだけ勉強も頑張ったつもりではある．とは言っても，年間50日はスキーをして，さらにその費用を工面するためアルバイトに明け暮れているようでは，大したことはできなかったが．さらに，競技スキーを続けたかったのが，大学院の修士課程に進学した動機だったことは，現在のような厳しい競争の時代では考えられないことである．当時はそれぐらいのんびりとした時代だったと思う．

卒業論文，修士論文ともに半導体の光物性の研究を行った．特にそれがやりたかったわけではなく，最も人気のない研究室を選ぶという，生来の天の邪鬼さから適当に選んだ研究室の高橋良二先生が，研究に関して全くの放任という，私にとって最も好ましい方針だったために，修士課程まで居座ってしまったというのが本当のところである．高橋研究室では，誰からも何も教わることなく完全に独力で，零から装置を立ち上げるという経験をさせてもらった．当時，大学には「安全」という概念はなかったので，本当に何でもやらせてもらった．100ボルトの電灯線を何度ショートさせたかわからないなど，今では有り得ない経験を相当積ませてもらった．もちろん，素人が文献を読んだだけで作った装置なので，大した成果は上げられなかったが，どんなものでも自作できるという妙な自信がついた．

このように私は特に学業が優秀であったわけではなかったが，修士修了時の就職は引く手あまたであった．はっきり言って，技術系の会社であればどこでも入れたと思う．それでも，「過ぎたるは及ばざるがごとし」とは良く言ったもので，どこに就職すべきかとても迷った．今では信じられないかもしれないが，この時代は企業の研究所でも基礎研究を行っており，さらに給料も研究費も大学とは比較にならないぐらい好条件であったため，博士課程に進むことは微塵も考えなかった．さらに，当時の修士課程の定員は現在の4分の1程度だったので，修士を取って会社に入ればエリートだった．現在の技術系会社の新卒技術系社員の大半が修士卒以上という状況に比べれば，本当に夢のような時代だったと思う．

単に資料を調べたり，会社に就職している物理工学科の先輩に話を聞いても迷いは深まるばかりだったので，手当たり次第，会社見学に出かけた．13社ぐらい見学させてもらったと思う．今もあまり変わらないが，当時から大手電機メーカーの研究所はとても人気があったため，天の邪鬼な私はそれ以外の会社を志向するようになった．そのためかどうか忘れてしまったが，光関係の会社に興味を持ち始めた．それでまず，キヤノンの見学に出かけた．キヤノンでは運命的な出会いがあった．それは，当時キヤノンにおられた清水明先生が，会社の説明をしてくださったことである．清水先生にお目に掛かるのは初めてであったが，会社にも凄い人がいるのだなあと，引く手あまたで少々天狗になっていた私には大きな刺激になった．普通なら，清水先生のような凄い人がいる会社の一員になりたいと，キヤノンを選ぶように思われるが，生来の天の邪鬼さがここでも頭をもたげ，キヤノンにだけは行くまいと思ってしまった．そこで，もう一つの光学大手であるニコンに入ることを何故だか決めてしまった．

3. 会社での研究からカリフォルニア工科大学留学直前まで

ニコンでは，開発本部研究所第一研究課という部署に配属された．前述したように，修士は一般的にエリートだったので，大事に育てようという気配りがあった．また，会社の研究所といえども

基礎研究をやっていたので，現在のようにあくせくした雰囲気はなく，極めてのんびりとしていた．3カ月程度の研修が終わると，光化学ホールバーニングという当時次世代光メモリーとして考えられていたものについて，1人で調べるよう上司から言われた．そしてそれが私の仕事になった．当時インターネットなどはないので，調べると言っても容易ではなく，最初は，会社にいた大半の時間を，図書室に論文を探しに行ったり，図書室にない雑誌の文献複写依頼書を書くことに費やしていた．さらに，そのようにして手に入れた論文を片っ端から読んでいった．それらが一段落して，そろそろ文献読みに飽きた頃，当時東京大学先端科学技術研究センターにいらした三田達先生，堀江一之先生に声を掛けていただき，両先生の下で光化学ホールバーニングの実験を行うことになった．いわば国内留学である．

三田・堀江研究室は高分子化学の研究室で，物理工学科出身の私は全くの門外漢だった．それでも，修士論文の研究を零から独力で行った経験から，第一原理からちゃんと考えてやれば不可能なことはないとわかっていたので，特に抵抗なく入って行けたと思う．また，一度会社に入った後で大学に戻ると，お金はなくても大学は良いところだと思うようになっていった．最もそう感じたのは，大学では教授も研究員も研究に関しては対等で，上司と部下という厳然たる主従関係がある会社とは比べようもないという事実である．ここでの研究はとてもスムーズに進み，3年後には学位論文をまとめ，博士号を取得した．

会社に戻ると，今度は基礎研究部門が茨城県つくば市に移転し，筑波研究所ができるということになり，より基礎研究にシフトしていった．今思えば，本当に信じられないことである．さらに，テーマそのものも自分の好きに選べるということになった．もちろん，「好きに」とは言っても会社の研究なので，将来何かの役に立たなければならない．もう少し正確に言うと，将来役に立つと上司を説得する必要があった．それまで大容量光メモリーの研究をしていた私は，高速読み出しの必要性について考えていた．つまり，大容量メモリーは高速読み出しして初めて意味があるということである．平たく言うと，1000倍の容量になったら1000倍の速さで読み出さなければ意味がないという自明の問題に悩んでいた．何故なら，光で情報を高速で読み出そうとすると，使える光量は減っていき，究極は光子1個が戻って来るか来ないかで0，1を判断するしかなくなる．これを標準量子限界あるいはショットノイズリミットと呼ぶが，計算してみると当時でもほとんどそれに近いレベルで動作している事実に愕然としていたのであった．もちろん，読み出しに使う光を強くすればその分S/Nは上がるが，読み出し光が強すぎると書き込みが起こってしまうため，むやみに強くすることはできない．色々調べた結果，大容量光メモリーの高速読み出し時に，標準量子限界を超えて情報を読み出すためには，読み出す光の量子状態をいじればよいという結論に至った．この考察を基に上司を説得し，光の量子状態をいじる研究＝量子光学研究スタートの許可をもらった．

量子光学の研究をして良いという許可はもらったが，当時は全くの素人だったため，修士論文や光化学ホールバーニングの研究のときと同様に，論文を読みあさり，それを唯一の手掛かりとして，半導体レーザーのスクイージングの実験を始めた．それまで半導体レーザーやスペクトラムアナライザー（スペアナ）に触ったこともなかったが，修士論文の研究で身に付いた，「第一原理で考えればすべての問題は解ける」という信念でやったところ，時間は掛かったが実験に成功した．また，物理工学科で学んだ回路学や制御論は大いに役立った．その後，この成果を論文にした．ただ，著者の欄に私の名前しかないこの論文を見て，一抹の寂しさを覚えた．

寂しさの理由は，実験は成功したが，それまでに時間が掛かりすぎ，非常に速く進歩している世界の強豪と競争するには，このままでは駄目だという焦りからであった．そこで，当時筑波研究所長を兼務されていた（「光の鉛筆」で有名な）鶴田匡夫先生に相談したところ，これも当時電気通信

大学教授をされていた宅間宏先生を紹介してくださり，宅間先生にどのように研究を行うべきか相談させていただく機会を得た．宅間先生にはカリフォルニア工科大学のKimble先生の下で研究するべきだとのアドバイスをいただき，推薦状を書いていただいた．1996年の初春のことである．早速，Kimble先生に連絡を取ると，一度セミナーをしてくれということだったので，ゴールデンウイークに初めてカリフォルニア工科大学を訪れた．今考えると当然であるが，宅間先生の推薦状があるとはいえ，全く実績のない私の実力をKimble先生は疑っていたのだと思う．ただ，企業からアメリカの大学に留学した友人はたくさんいたため，いざというときはバックにある会社からのお金をちらつかせれば，門前払いにされることはないとも聞いていたので，それほど危機感はなかった．それでも，セミナーの後，Kimble先生の部屋に呼ばれて，Kimble研究室での研究の許可をもらうときにはとても緊張したことを覚えている．拙い英語で恐る恐る「いくら会社から持って来たら良いか？」と聞いたところ，ちょっと沈黙があって，「One beer!」と言われたときのことは今でも忘れられない．

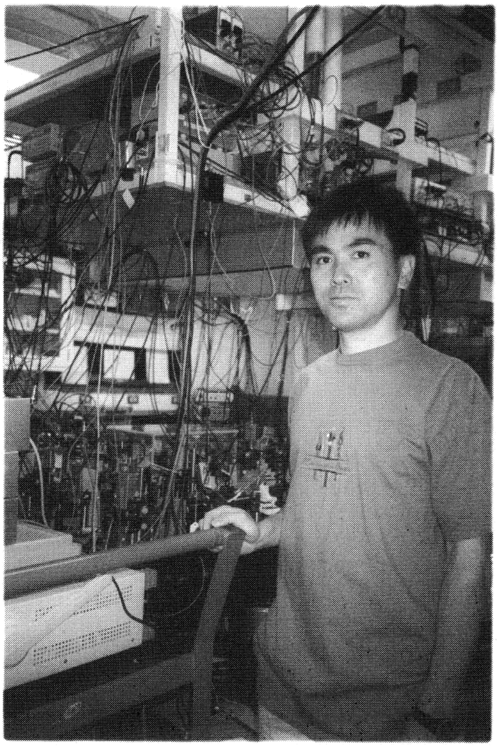
4. カリフォルニア工科大学留学から現在まで

1996年8月，家族を連れて渡米した．最初は，日常会話でとても苦労した．幸い，物理の用語は日本語も英語も余り変わらないので，研究そのものでは特に困ることはなかったが．それでも，英語のnative speakerとは丁々発止の議論ができるはずもなく，いつも研究室では無口であった．ただ，しばらくすると，あることに気づいた．それは，当時私は34歳だったので当り前のことではあるが，ほとんどが自分より経験の遙かに浅い人たちだったのである．さらに，私に有利だったのは，私は物理工学科出身であったため回路学や制御論を体系立てて習ったことがあるのに対し，他の人はほぼ全員我流でその場しのぎでやっているという状況だった．量子光学の実験というと光の実験という印象があるが，実際には電気回路での制御のかたまりなので，これらの知識は絶対的な強みになる．もちろん，それ以外にも古典光学，量子力学の知識は必須であるが，それらも物理工学科でみっちり鍛えられたという自負があった．つまり，物理工学科でやったすべてのことが自分に決定的な強みを与えてくれていたことに気づいたのである．

それに気づいてからは，何も怖いものはなくなった．例によって，「第一原理で考えればすべての問題は解ける」という信念で，落ち着いて実験に取り組むことができた．どういう巡り合わせか「量子テレポーテーション」の実験を行うことが決まり，わけのわからない抽象的な論文を渡されたときも，不可能であるとは微塵も思わなかった．ちょっと時間は掛かるかもしれないとは思ったが．

量子テレポーテーション実験を始めてしばらくしたころ，Kimble先生とアリゾナで行われたワークショップに2人で参加したことがあった．夕食を2人で取っているとき，私は大胆にも，「この実験を成功させる完全な方法を思いついたから，あとはやるだけで，それも3カ月でできる」と宣言してしまった．それに対し，Kimble先生は「ビールを賭けるか？」というので，「もちろん」と答えた．当然，勝てる確信はあった．3カ月後，約束通り結果を持って行くと，「この結果は凄すぎるので，自分の手で実験をやらないと信じることはできない」ということになった．Kimble先生としても革命的な結果なので，もし万一間違いがあると，学者生命が終わると思ったのだと思う．当時，私は1人で実験をやっていたので，それから3週間，Kimble先生と2人で実験することになった．

3週間と期限を切ったのは，この結果を3週間後にサンフランシスコで行われる量子エレクトロニクス国際会議（IQEC1998）で発表しようと考えたからである．IQECには量子テレポーテーション理論の発表としてエントリーしてあった．3週間もあれば「楽勝」だと始めたKimble先生との追試であったが，予想に反してうまく行かなかった．そして，あっという間に発表の前日になってしまった．それまでにあらゆることを試していたはずで



カリフォルニア工科大学 Kimble 研究室，量子テレポーテーション実験装置の前で．1998 年 5 月．

あったが，冷静になって振り返ってみると，一つだけ忘れていたことがあることに気づいた．この期間，ほとんど不眠不休で実験をやっていて疲労困憊していたために，大事なことを忘れていたのだと思う．祈るような気持ちでそれを試したところ，実験を成功させることができた．そのときだけは，祈りが神様に通じたと本当に思った．実験が成功する瞬間を Kimble 先生と共有でき，最後に「I agree with you.」と言われて握手したことは，生涯の思い出になった．

実験が成功したとき，すでに発表当日の午前 0 時を回っていた．連日の実験の疲労で困憊していた我々は，そこにいた学生を捕まえて，発表用の OHP を作るようにデータを渡した．カリフォルニア工科大学はロサンゼルス群のパサディナにあり，IQEC の会場はサンフランシスコで，飛行機で 1 時間ぐらい掛かる．午前 4 時に Kimble 先生が私を自宅アパートまで迎えに来て，さらに学生に頼んでおいた OHP をもらい，2 人一緒に飛行機でサンフランシスコの会場へ向かった．IQEC の会場には，発表の 2 時間ぐらい前にたどり着いた．会場では，我々が実験に失敗して来ないと観念して，理論家の Braunstein 先生が量子テレポーテーション理論発表のために待機していた．Kimble 先生は Braunstein 先生を見つけるなり，彼の首を絞めて「お前の理論が悪いからこんなに苦労してしまったんだ」と笑って叫んでいた．私は，先ほど学生から渡された発表用の OHP から発表内容を考えるのに精一杯で，喜びを表現している暇もなかった．それでも何とか発表も無事終わりホッとしていると，Kimble 先生が「お前にはビールを渡していなかったな」と言って，食事を奢ってくれた．

1998 年 10 月，日本に帰国した．とても残念なことであったが，ニコンの筑波研究所はその年の 8 月に閉鎖されていた．皆さんご存じの大不況時である．当時は会社も生きるか死ぬかの状態で，とても基礎研究などやっていられなかった．私は行き場を失った．ただ，幸いにも，しばらくすると現在の職場である東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻，つまり私の卒業した物理工学科で助教授の公募があり，運良く採用された．つくづく強運だったと思う．物理工学専攻に採用されてからは，現在まで優秀な学生に囲まれて「左団扇」である．何せ，私の「同類」ばかりなので，「ちゃんと」機械を壊しまくってくれている．

以上のように，私はずっと好きなことをやってきただけである．もちろん，好きなことを続けるためにはそれなりの努力は必要であるが，本来，その努力も楽しいものなので苦にはならない．逆に苦になるなら，それはやっていることが好きではないように思う．したがって，若い人への道しるべとしては（これが本連載のタイトルであるが），好きなことを続けていれば道は自ずと拓かれるということであろうか．

（ふるさわ・あきら，東京大学大学院工学系研究科）



数学の道しるべ
～研究者の道とは何か～
第5回

あきらめないで

森下　昌紀

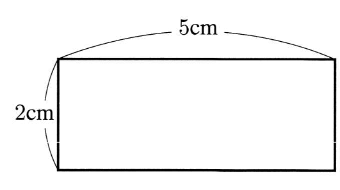
私は，結び目と素数の類似に基づいて，幾何学と整数論の相互啓発的な研究をしています．私が結び目理論と整数論の間の類似性に気づき，自分の数学の世界が見え始めるまで，大学を出てから12, 3年の年月が経っていました．その間，私は自分の道を見出せず，悶々として過ごしてきました．従って，私は研究者としては未だ駆け出しで，大した仕事もしておらず，このような記事を書くのにふさわしいものとは思われません．また，大学の先生の多くが，学生時代に学業優秀であるのに比べて，私はあまり優等ではありませんでした．にも関わらず，現在まで数学を続けてこれたのは，よい師，数学者との出会いと両親の愛情に恵まれたからだと思います．一度は執筆をためらいましたが，このような私を励ましてくれた人たちの教えを若い世代にお伝えすることも，私に与えられた恵みかもしれません．個人的な回顧話が多くなり恐縮ですが，書かせて頂きたいと思います．

私がお世話になり，教えを受けた人たちはたくさんいるのですが，中でも，私が最も大きな影響を受け，私が一人前の数学者になれるよう導いてくれた人が二人おります．一人は私の母であり，もう一人が小野孝先生（ジョンズホプキンス大学）です．

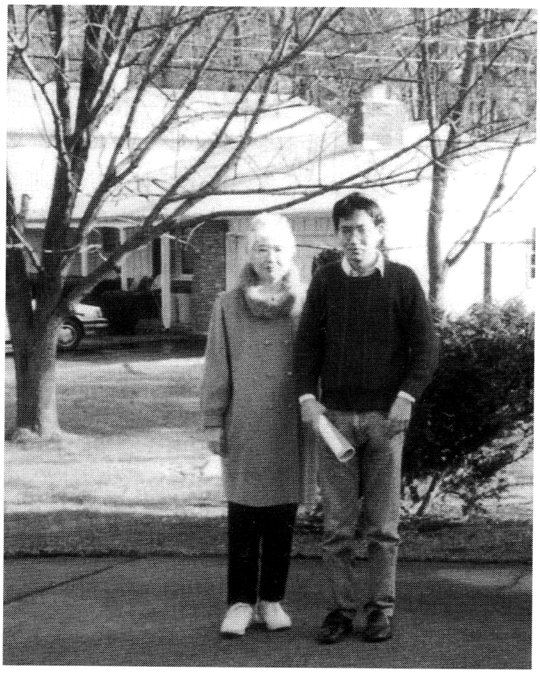
1. 母の愛情

私は，母と外見も性格もそっくりで，まさに分身でした．母は，家族，特に私のために自分の命を削って生きた一主婦で，特に数学の素養があるわけではありませんでしたが，今思うと，母の教え，支えは，私が学者になるために適切なものだったように思います．

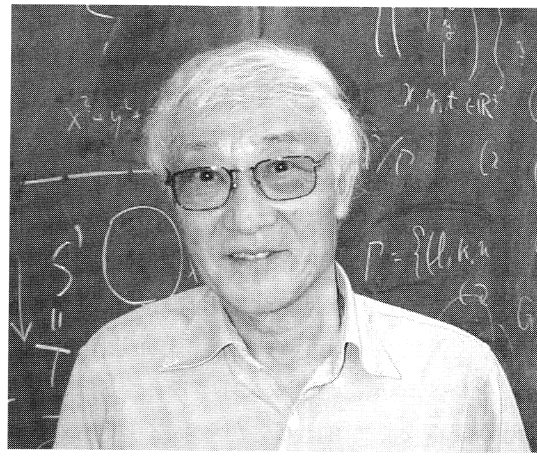
小学生の頃，学校で，次のような長方形の面積を求めなさい，という問題が出されました：



私は，線には太さがあるので，5 cm といっても，縦線の内側から測っているのか，外側から測っているのかわからない，と先生に質問しました．先生の答えは「へ理屈言うな」でした．子供の頃，私は，勉強に限らず，このような疑問がよく生じ，紙片に疑問を書きつけては持ち歩いていました．学校の先生の対応は概して「なぜなぜうるさい，へ理屈言うな」でした．当時，私は運動と友達と遊ぶことが好きで，全く勉強しなかった上，学校で出された宿題のプリントを下校途中捨てて帰るなど



母と筆者（小野先生宅前で）．



小野孝先生．

素行が悪かったので，先生は私を問題児扱いしていたのかもしれません．その度に母は学校へ呼び出され，私のことで怒られていました．しかし母はこうしたことでは私を決して怒りませんでした（私が本当に悪いことをしたときはひどく怒られましたが）．勉強については，母は「自分で考えなさい」と言いました．自分で考えるとすぐにいつもの疑問が生じ，それを母に尋ねると，母は，理数系の大学に通う近所のお兄さんを探してきて，「息子の疑問に答えてほしい」と頼んでいました．それで私の疑問のいくつかも解消されたことを覚えています．上の長方形の面積の疑問も，線の面積は0である，と教わり納得しました．母は私と私の疑問の本質を理解していたのだと思います．もし，疑問に思うこと，自分の問いを考えることが数学者にとってよい資質なら，それは唯一つ私が子供の頃からもっていたもので，それを守り育ててくれたのが母でした．後年，私の結び目と素数の論文が出版されると聞くと，母は死の床で声も絶え絶えに「お祝いしなきゃ，お前の実力だよ」と言ってくれました．どうして数学者になれたのかと聞かれるなら，私の場合，それは母の愛情のお陰，としか答えようがありません．

2. 小野先生との邂逅

小野孝先生との出会いは私にとって決定的でした．私の数学に対する考え方，どのような数学がよいかという価値観すべて，小野先生の影響を受けました．私は小野先生を絶対的に信頼していますが，それはむしろ先生という人間によります．先生はいつも弱い立場の人の味方につく方でした．先生の優しさは，優等生の利口な偽善でなく，目には見えない純粋な優しさでした．小野先生のそのような所が母に似ていて，私は先生を絶対的に信頼しました．私は大学院生として小野先生につきましたが，数学の研究に関して先生から学んだことは次の2点に尽きます：

(A)「（ガチャガチャ勉強せず）まず白紙の上に自分で考えたことを書いてゆきなさい」

(B)「数学の分野は一つである（すなわち，数学の諸分野はみな繋がっている）．専門家になるな」

これらの教えは，通常の大学での数学教育や大学院生の指導と反するように聞こえるかもしれません．その真意を説明したいと思います．

(A)　小野先生に最初にお会いしたとき，私は，当時流行していたX氏たちの数学理論を勉強し，そこにある予想や関連することをやりたい，と先生

に申しました．それに対し，先生は，「その理論はX氏が創ったものです．貴方はX氏ではない．貴方がどんなに頑張ってもX氏が最初にその理論のアイディアをつかんだときと同じ興奮は味わえません．貴方はゼロから貴方の数学を創りなさい」と言われました．こう言うと，読者の中には，自分は天才ではない，どうして白紙の上に新しい数学を創れるのか，と思われる方もおられるかもしれません．私もそう思いました．しかし，先生は，どんなレベルでも，どんなに小さな，へっぽこなものしかできなくても，ゼロから手作りで始めるよう薦めました．それは，既存の数学を十分学んだ後では，すでにその思想の影響下にあり，思いがけない新鮮なアイディアが出にくい，という考えによります．実際，先生の普段のお話はいつも意表をつくような新しい視点と面白いアイディアに満ちたものでした．私も，上で述べたように，小さい頃から自分の疑問をもつことは得手のほうだったので，いろいろ問題を作りました．しかし，それを発展させて数学を創ってゆくことが大変難しいことを実感しました．数学は確かに自由な学問なのですが，一方緻密な推論が要求されます．この部分が，他の芸術に比べてかなり厳格にできていて，単なる思いつきではなかなか進まないのです．結局，私は，小野先生のところにいる間は何もできず，その後も悶々とし続けました．しかし，あのとき，突拍子もないことをいろいろ考えたこと，失敗したことが，今になって目には見えない形で役立っているように思います．

(B)　小野先生についた頃，私は整数論のある部分は詳しく勉強していたのですが，数学の他の分野については基本的な事柄ですらよく知りませんでした．しかし，先生から，数学の基本的な考え方は諸分野に共通して相通じるものがあり，そのような類似性・関連性を理解することが数学を深く理解することで，アイディアと新しい問題意識の源泉となることを学びました．小野先生は決して私に何かを勉強しなさい，とは言いませんでしたが，一度だけ，「貴方が整数論をやりたいのなら，なるべく整数論から離れた分野の古典を読んでみてはどうですか」と言われ，Poincaré, Kummer, Kleinなどの全集を薦められたことがありました．Kummer, Kleinについては，超幾何関数に関する仕事を読んでみるように薦められました．Kummerは整数論の研究で有名ですが，体の拡大のKummer理論など，微分方程式のモノドロミーの理論と相通じるものがあります．Kummerに限らず，例えば，Gaussの数学を見ても，一見いろいろなことをやっているように見えますが，実は類似する考え方が底に流れています．小野先生はそういうアイディアの横の繋がりを理解することを重要視されました．日本では，専門家であること，職人芸的であることが尊ばれる向きがありますが，小野先生はむしろ素人的であることの大切さを強調されました．それは，(A)に述べたこととも関係しますが，専門家になると，既存の考え方に縛られ，柔軟な発想が出にくくなるという考えによります．先生はよく「数学の世界では若い人ほど偉い」と言われましたが，それは，子供のように感じ，自由に考えることの大切さを意味していたのだと思います．

小野先生がもう一つ私にしばしばおっしゃった言葉があります．あるとき，母が「いい唄だから聴いてみなさい」と長渕剛さんが紅白歌合戦で歌った「乾杯」と「親知らず」という唄の入ったテープを送ってきました．小野先生にもお貸しすると，「あの唄は本物だね，特に『親知らず』の中にはいいフレーズがあるね」とおっしゃられ，その後ことあるごとに私に「侍になれ」とおっしゃるようになりました．母も小野先生も私に一人前の数学者になってほしかったのだと思います．

3. 小野先生の教えに加えて：私の経験から

小野先生の教えに加え，私からもこれから数学の研究を始める方へ2, 3補足させて頂きたいと思います．

・私は，自分の問題を考えることと並行して，やはり最近の研究にも目を配り，興味をもったことは勉強しておいたほうがよいと思います．それは，よいアイディアの芽を得ても，それを数学として発展させてゆくにはいろいろなスキル

が必要とされるからです．私の経験では，どんなことでも勉強したことは，後に何らかの形で役立つと思います．

- 不調のときでも，自分にできる範囲で，できることを論文という形にまとめるとよいと思います．Gauss のような数学者なら話は別ですが，私の経験（4 節に述べます）では，どんな論文でも仕上げるにはそれなりの労力が要り，何か形になることにより自分に少しでも自信がつき，次につながると思うからです．
- 貴方が独自のアイディアをもって新しい数学を始めるとき，他の人たちから理解されず批判の対象になることがしばしばあります．貴方が思いを込めた数学ですから，それは辛いことです．そのようなときの気持ちの持ちよう，対処法について少し述べます．かつて岩澤健吉先生が円分体の岩澤理論を創めたとき，それが古典的で，当時の流行の数学と違っていたため，批判する人がいたという話を小野先生から伺ったことがあります．そのときの岩澤先生の態度は全く馬耳東風だったそうです．もし貴方が馬耳東風でいられるなら，それが一番だと思います．もう一つ，これは昔テレビ番組で広中平祐氏が当時巨人軍の選手だった王貞治氏と対談中におっしゃったことですが，「数学は，批判する人ではなく，批判される人によって創られる」という言葉があります．この言葉は貴方の支えになるかもしれません．最後に，私の処し方を述べます．貴方が私のように，反論したり人と争うことを好まない場合です：ただ黙って我慢し，黙々と次の論文，次の論文と書いてゆくことです．そうすれば，必ずどこかで誰か（真の理解者）が貴方を見ていてくれると思います．

4. 自分の道

さて，母や小野先生の願いも空しく，私は小野先生の下を離れた後も自分の数学を見出せず悶々とし続けました．当時私は金沢大学に就職させて頂き，初めて大学で教える側に立っていました．研究のほうは自分の道を見出せずにいましたが，就職できた喜びもあってか，授業など教えるほうは大変張り切ってやっていました．しかし，私の場合，それは逃避でした．そんなとき，古田孝臣先生が私の研究室にふらっと現れ，さりげない感じで「数学はあきらめたらだめだよ，あきらめたときに終わってしまうんだよ」とおっしゃいました．それは私にとって大変貴重なアドバイスになりました．ちょうど同じ頃，母からも「お前，自分の勉強しているかい？ へっぽこ論文しか書けなくても（それが今のお前の力だから）仕方ないから，とにかく論文を書きなさい．それがお前の仕事なんだよ．そうすれば少しずつ自分に自信がついてゆくから」と言われました．母は私を見抜いていました．それから論文を書こうとし，一つ小さな結果をまとめました．それは自分の数学といえる論文ではありませんでしたが，その論文が縁になり，共同研究者に恵まれ，その後もいくつか論文が書けました．すると，研究集会などで発表する機会を頂き，その研究集会で知り合った人たちとの研究交流も生まれました．

1998 年 6 月，早大理工である研究集会があったときのことです．生協で河内明夫編著『結び目理論』（シュプリンガー・ジャパン）を眺めていたとき，書かれていることが代数的整数論とそっくりに見えました．特に，Alexander 加群の理論が岩澤理論とよく似ていることが印象的でした．学生の頃，加藤和也先生の講義で“素数 p には p 元体 $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ が対応し，素スペクトル $\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p)$ のエタール基本群は無限巡回群（の完備化）なので，$\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p)$ は円周のように見える” ことと “整数環 $\mathbf{Z}$ のエタールコホモロジー次元が 3 である” ことを教わったことを思い出しました．とすると，素数の埋め込み

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$$

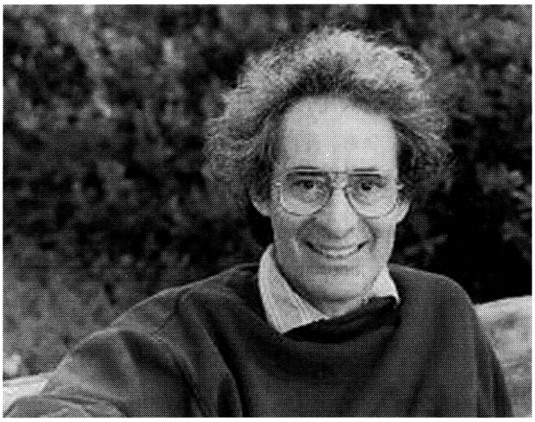
は結び目に見えます．そう思うと，結び目理論と整数論の間に類似性があることは自然で，Alexander 理論と岩澤理論の類似性もその一つの帰結と思えました．私はこういったことをその研究集会のため偶然来日されていた小野先生に話してみました．

小野先生は目を輝かせながら，熱心に聞いて下さり，最後に，「やっと自分の道を見つけましたね．貴方の道を行きなさい」と励まして下さいました．このときから私の研究は始まりましたが，私がこの類似性の確信を得たのはそれから1年後，Milnorの絡み目群についての論文を読んだときでした．その中に書かれていた絡み目群の表示が，代数体の分岐条件付きGalois群に関するKochのある定理とそっくりなことに気づきました．このことから，まつわり数とべき剰余記号，Milnorの3重まつわり数とRédei記号などの類似性が明解に説明されることもすぐわかりました．このとき私はシドニーに滞在していたのですが，大学の公衆電話から母に電話し「やっと自分の数学をつかんだよ」と言いました．母は「よかったね，自分の道を行きなさい」と喜んでくれました．それから宿泊先の寮に帰る途中，涙が溢れ出て止まりませんでした．寮に戻ると，私は夢中で小野先生に私の見つけた類似について手紙を書きました．シドニーの後，カナダに行くことになっていたのですが，一時日本に戻ると小野先生から返事のメールがきていました：「今，Moravaと貴方の手紙について話しました．整数論–トポロジーの合同セミナーを開くから，カナダ滞在中アメリカにいらっしゃい」．私はやっと小野先生に自分の数学について話すことができる，と嬉しくてたまりませんでした．あきらめないでよかった，と思いました．

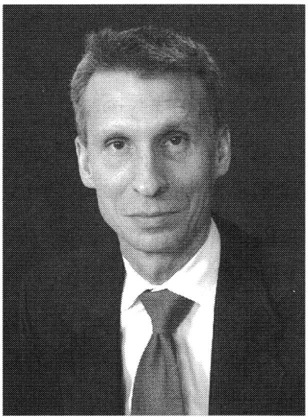
その後，10年あまり結び目理論と整数論の類似性の研究を続けています．今では基礎付け的な部分はほぼ終わりました[1)]．

5. 尊敬する数学者との出会い

結び目と素数の類似に関する最初の論文を書いた後，B. Mazur氏（ハーバード大学），M. Kapranov氏（エール大学），A. Reznikov氏[*1)]らもこの類似性について指摘したことがあるということを伝え聞きました．私は自分が最初に気づいたと思っていたので，そのときは大変なショックを受けましたが，それが縁で，Mazur氏，Kapranov氏と知り合うことができました．二人は私が最も尊敬する数学者です．



Barry Mazur 氏.



Mikhail Kapranov 氏.

Mazur氏はトポロジー，代数幾何学，整数論と幅広い領域に最も卓越した業績を残し，現在も最先端で活躍されている当代随一の数学者です．Mazur氏は，小野先生の教えで述べたような，異なる領域のアイディアの横の繋がりを鋭く察知する達人で，数学の新しい地平を切り開くような仕事と共に，最先端の技術を駆使して未解決の難問も解決するという最も優れた数学者だと思います．私はMazur氏の仕事のうち整数論に関するもののごく一部しかわからないのですが，そこにも幾何学的

*1) A. Reznikov氏（1960–2003）は若くして亡くなられました．氏の業績を偲び，追悼論文集が出版されています：Geometry and Dynamics of Groups and Spaces, In Memory of Alexander Reznikov, *Progress in Mathematics*, Vol. **265**, Kapranov, M.; Kolyada, S.; Manin, Y.I.; Moree, P.; Potyagailo, L. (Eds.), 2008.

な発想が随所に見られます．私にとってMazur氏の数学は遠い憧れでした．従って，Mazur氏も結び目と素数の類似を指摘したことがあると聞いたときは，大変なショックであったと同時に，Mazur氏ならあり得るかもと思いました．とにかく私は自分の論文と共に，Mazur氏がこの類似についてどのようなことを指摘し，論文があるのかどうかを尋ねる手紙をお送りしました．私はMazur氏とは面識がなかったので返事があるかどうか心配だったのですが，予想外にもMazur氏からすぐに長い返事のメールを頂きました．メールには確かにかつて結び目と素数の類似に関するプレプリントを書いた（が未発表であった）こととその内容および私の論文に対する興味と励ましの言葉がありました．私はホッとし，憧れの数学者から親切な返事を頂いたことに嬉しい気持ちでいっぱいになりました．と同時に，面識もない，無名の私にも数学本位で誠意をもって対応して下さったMazur氏にとても感謝し，尊敬しました．その後，Mazur氏と直接お会いする機会に恵まれたのですが，そこでもMazur氏は親切な激励を下さり，このことはその後の私の研究の支えになりました．

Mazur氏からのメールで，Kapranov氏も私の論文と関係する研究をされたことを伺ったので，私はKapranov氏とも連絡をとり，お会いする機会を得ました．Kapranov氏には初対面のときから圧倒されました．氏が代数幾何学，表現論，数理物理学の幅広い領域で活躍されている数学者であることは知っていましたが，お話してみると氏の知識はこれらの分野にとどまらず，ほとんどすべての数学の分野に渡り，しかもそれらを相互に関連付けて深く理解されていることがわかりました．私が質問をすると，それは数論ではこの事実，代数幾何学ではこれ，トポロジーではこれ，物理学ではこのことに対応していると類似性・関連性を明快に説明して下さいました．分野の壁を感じさせない，天真爛漫，自由な発想に私はすっかり魅了されました．さらにKapranov氏は古典にも深い造詣をもっており，このことが氏の数学を深く重厚なものにしているように思いました．まさに小野先生の教えの理想像を感じました．あるときKapranov氏から直接伺ったのですが，このようなスタイルは氏が育ったモスクワのManin, Gelfandらのグループにある文化だそうです．その後もKapranov氏とお会いする機会に恵まれたのですが，いつも氏の数学の雄大なことと卓越したアイディアに圧倒されます．

私が数学を始めた頃，自分がMazur氏やKapranov氏のような数学者に出会えるとは夢にも思っていませんでした．両親の愛情に恵まれ，小野先生に励まされ，自分も一人前の数学者になりたいと思いました．私は頭のいいタイプではないので，ただあきらめずに粘り強く続けるだけでした．少しずつ自分に書ける論文を書いていると不思議とよい人との出会いに恵まれ，それがまた次のよい出会いへと導いてくれたような気がします．あきらめないでよかったかな，と思います．

若い読者の皆さん，どうか自分のアイディアを信じて突き進んで下さい．失敗したら，起き上がり，再び突き進むこと，それが若者の特権ではないでしょうか！ 頑張って下さい．

参考文献

1) 森下昌紀，『結び目と素数』，シュプリンガー・ジャパン，出版予定．

（もりした・まさのり，九州大学大学院数理学研究院）

視覚の科学と数学

ウェーブレットで探る錯視の世界

第5回

視覚の数理モデルのためのウェーブレット・フレーム

新井 仁之

今回は視覚，錯視そのものの話ではなく，視覚と錯視の数学的研究を支える純粋数学の話題を扱う．視覚の数理モデルの研究をするには，これまで用いたウェーブレットのみならず，ウェーブレット・フレーム，フレームレットといったものも必要になる．大まかに言って，ウェーブレットは基底であり，かつ多重解像度構造を持っている．ウェーブレット・フレームは基底より冗長なもので，フレームレットはウェーブレット・フレームの中でも，ウェーブレットのような多重解像度構造を持っている．フレームレットは2003年頃より，視覚の研究とは関係なく，その数学的な研究が始められたものである[5]．本稿では，主にウェーブレット・フレームに関する基礎事項を視覚と錯視の研究に関連する範囲で解説する．また我々が構成した視覚の数理モデルに適した新しいウェーブレット・フレームとフレームレットについても触れる．まず基底について入門的事項から始めよう．

5.1 正規直交基底とリース基底

X を $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ を内積とするヒルベルト空間とし，$\|\cdot\|_X$ をその内積から定まるノルムとする．係数体は複素数体 $\boldsymbol{C}$ とする．視覚と錯視の研究で必要なヒルベルト空間としては次のものがある：自然数 N に対して $\boldsymbol{Z}_N=\{0,1,\cdots,N-1\}$ とする．自然数 $N_1,\cdots,N_d$ に対して，直積集合 $\boldsymbol{Z}_{N_1}\times\cdots\times\boldsymbol{Z}_{N_d}$ の元 $\boldsymbol{n}=(n_1,\cdots,n_d)$ に複素数 $x[\boldsymbol{n}]$ を対応させる写像 $x=(x[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}_{N_1}\times\cdots\times\boldsymbol{Z}_{N_d}}$ 全体のなす集合を $l^2(\boldsymbol{Z}_{N_1}\times\cdots\times\boldsymbol{Z}_{N_d})$ により表す．例えば $N_1\times N_2$ ピクセルのグレースケールのディジタル画像は $l^2(\boldsymbol{Z}_{N_1}\times\boldsymbol{Z}_{N_2})$ の元とみなすことができる．$x=(x[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}_{N_1}\times\cdots\times\boldsymbol{Z}_{N_d}}$, $y=(y[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}_{N_1}\times\cdots\times\boldsymbol{Z}_{N_d}}$ および複素数 α, β に対して，線形和を

$$\alpha x+\beta y=(\alpha x[\boldsymbol{n}]+\beta y[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}_{N_1}\times\cdots\times\boldsymbol{Z}_{N_d}}$$

により定義すると，$l^2(\boldsymbol{Z}_{N_1}\times\cdots\times\boldsymbol{Z}_{N_d})$ は線形空間になる．またこれは

$$\langle x,y\rangle_{l^2(\boldsymbol{Z}_{N_1}\times\cdots\times\boldsymbol{Z}_{N_d})}=\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}_{N_1}\times\cdots\times\boldsymbol{Z}_{N_d}}x[\boldsymbol{n}]\overline{y[\boldsymbol{n}]}$$

を内積[*1]として，$N_1\cdots N_d$ 次元ヒルベルト空間になる．無限次元ヒルベルト空間としては次の空間が用いられる．$\boldsymbol{Z}$ を整数全体からなる集合で，その d 個の直積を $\boldsymbol{Z}^d$ により表す．$\boldsymbol{Z}^d$ の元 $\boldsymbol{n}=(n_1,\cdots,n_d)$ に対して複素数 $x[\boldsymbol{n}]$ を対応させる写像を $x=(x[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}^d}$ により表す．そしてこのような写像全体からなる集合を $l(\boldsymbol{Z}^d)$ とおく．

*1) 本稿では複素数 z に対して $\overline{z}$ によりその複素共役を表す．

$l(\boldsymbol{Z}^d)$ の元 $x=(x[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}^d}$, $y=(y[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}^d}$ と複素数 α,β に対して，

$$\alpha x+\beta y=(\alpha x[\boldsymbol{n}]+\beta y[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}^d}$$

により $l(\boldsymbol{Z}^d)$ は線形空間になる．さらに $1\le p<\infty$ に対して

$$\|x\|_{l^p(\boldsymbol{Z}^d)}=\left(\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}^d}|x[\boldsymbol{n}]|^p\right)^{1/p}$$

とし，$l(\boldsymbol{Z}^d)$ の元 x で，$\|x\|_{l^p(\boldsymbol{Z}^d)}<\infty$ をみたすもの全体のなす集合を $l^p(\boldsymbol{Z}^d)$ により表す．特に $l^2(\boldsymbol{Z}^d)$ は

$$\langle x,y\rangle_{l^2(\boldsymbol{Z}^d)}=\sum_{\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}^d}x[\boldsymbol{n}]\overline{y[\boldsymbol{n}]}$$

を内積とするヒルベルト空間になる．例えばディジタル画像はゼロ・パッディングによりこの空間の元と考えることができる．しかし $x\in l^2(\boldsymbol{Z}_{N_1}\times\cdots\times\boldsymbol{Z}_{N_d})$ を $\boldsymbol{Z}^d$ に周期拡張した x_{per} は零からなる信号の場合を除いて $l^2(\boldsymbol{Z}^d)$ に属さない．この他ルベーグ空間 $L^2(\boldsymbol{R}^d)$ も重要な例である．

次に基底の定義を記す．

定義 5.1. **(1)**（X が有限次元の場合） D を X の次元とする．X の元からなる集合 $\{u_n\}_{n=1}^D$ が次の条件をみたすとき，X の**基底**と言う：任意の $x\in X$ に対して，$x=\sum_{n=1}^D a_nu_n$ をみたす複素数 a_n, $n=1,\cdots,D$ が一意的に存在する．
(2)（X が無限次元の場合） X の元からなる集合 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ が次の条件をみたすとき，X の**シャウダー基底（以下，単に基底）**と言う：任意の $x\in X$ に対して，

$$\lim_{N\to\infty}\left\|x-\sum_{n=1}^N a_nu_n\right\|_X=0$$

をみたす複素数 a_n, $n=1,2,\cdots$ が一意的に存在する*2)．このことを $x=\sum_{n=1}^\infty a_nu_n$ と表す．
(1) あるいは (2) の場合，a_n を $c_n(x)$ と記し，x の**展開係数**と言う．

*2)　シャウダー基底が存在すれば，X は明らかに可分である．

基底の中でも特に重要な役割を果たすのが次のものである．

定義 5.2. X の基底 $\{u_n\}$ が $n=m$ の場合 $\langle u_n,u_m\rangle_X=1$，そして $n\neq m$ の場合 $\langle u_n,u_m\rangle_X=0$ をみたすとき，X の**正規直交基底**と言う．

フーリエ級数の理論は正規直交基底の枠組みの中で捉えられ，一般化されている．その一つは次の**一般化フーリエ展開**である：

定理 5.3. $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ を X の正規直交基底とする．このとき x の展開係数は $c_n(x)=\langle x,u_n\rangle_X$ で与えられる．すなわち

$$x=\sum_{n=1}^\infty\langle x,u_n\rangle_X\,u_n$$

が成り立つ．（X が D 次元の場合は無限和を有限和 $\sum_{n=1}^D$ に置き換えて成り立つ．本節の議論は，有限次元の場合にはこの種の読み替えをして移行できる．）

正規直交基底において次の**パーセヴァルの等式**は有用である：

定理 5.4. $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ を X の正規直交基底とする．このとき任意の $x\in X$ に対して次が成り立つ：

$$\|x\|_X^2=\sum_{n=1}^\infty|\langle x,u_n\rangle_X|^2.$$

フレームの定義を述べる前に，リース基底の定義と基本的な性質を挙げておきたい．X から X への全単射で連続かつ線形（したがって両連続）である写像を X 上の同型写像であると言う．

定義 5.5. $\{u_n\}_{n=1}^\infty\subset X$ が X の**リース基底（Riesz basis）**であるとは，X 上のある同型写像 S と X のある正規直交基底 $\{v_n\}_{n=1}^\infty\subset X$ が存在し，$S(v_n)=u_n$, $n=1,2,\cdots$ となって

いることである．

リース基底は基底であり，さらに次のようなことが成り立つ：

定理 5.6. $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X のリース基底とすると，ある正定数 A, B が存在し，任意の $x \in X$ に対して次が成り立つ：

$$A \|x\|_X^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle_X|^2 \leq B \|x\|_X^2 .$$

5.2 フレームの基礎理論

基底に比べてフレームという用語はそれほどなじみのあるものではないかもしれない．もともとはフーリエ級数論に端を発するもので，1952 年に Duffin と Schaeffer[6] により導入された概念である．フレームの定義は次のものである．前述の定理 5.6 と比較してほしい．

定義 5.7. $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が X の**フレーム**とは，ある正定数 A, B が存在し，任意の $x \in X$ に対して

$$A \|x\|_X^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle_X|^2 \leq B \|x\|_X^2$$

が成り立つことである．特に $A = B$ にとれるとき，$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を**タイト・フレーム**と言う．

この定義のみでは，その意味が読み取りづらいかもしれないが，X が有限次元の場合を考えるとわかりやすい．次のことが容易に証明できる：X が有限次元の場合，$\{u_n\}_{n=1}^{L}$ が X のフレームであるための必要十分条件は，$\{u_n\}_{n=1}^{L}$ の線形包が X と一致することである．ただし線形独立とは限らない．無限次元の場合でも次の定理が知られている．

定理 5.8. $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X のフレームとする．このとき，X のあるフレーム $\{\tilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し，次の (1), (2) が成り立つ：
(1) 任意の $x \in X$ に対して $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, u_n \rangle_X \tilde{u}_n$.
(2) 任意の $x \in X$ に対して $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \tilde{u}_n \rangle_X u_n$.
特に $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ がタイト・フレームの場合，$\tilde{u}_n = A^{-1} u_n$ として (1), (2) が成り立つ．(1), (2) をみたす $\{\tilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の**双対フレーム**と言う．

5.3 マルチレート信号処理

視覚と錯視の数学的な研究では，計算機シミュレーションが重要な役割を果たす．そのためにはウェーブレットやウェーブレット・フレーム，フレームレットをマルチレート信号処理の立場から捉えておくと便利である．

マルチレート信号処理では，サンプリングレートを変更するために，サンプリング行列 M によるダウンサンプラーとアップサンプラーを用いる．M を整数を成分とする $d \times d$ 行列で，最小の特異値は 1 より大きいものとする．M により生成される格子を $\mathrm{LAT}(M) = \left\{ \boldsymbol{n} M^T : \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^d \right\}$ により表す．ここで T は転置を表す．例えば画像処理でよく扱うものとしては，$d = 2$ の場合の

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

などがある．これらはそれぞれ方形格子行列，五の目格子行列，六角格子行列と呼ばれている．

$x = (x[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^d}$ に対して，M 倍ダウンサンプラーは

$$(\downarrow M) x[\boldsymbol{n}] = x[\boldsymbol{n} M^T], \quad \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^d$$

により定義され，M 倍アップサンプラーは，$\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^d$ に対して，

$$(\uparrow M) x[\boldsymbol{n}] = \begin{cases} x[\boldsymbol{n}(M^{-1})^T], & \boldsymbol{n} \in \mathrm{LAT}(M) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

により定義される．信号処理における基本的な演算であるたたみ込み（あるいは合成積）を定義しておく：$x = (x[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^d} \in l^1(\boldsymbol{Z}^d)$ と $y = (y[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^d} \in l^2(\boldsymbol{Z}^d)$ に対して

$$x * y[\boldsymbol{n}] = \sum_{\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{Z}^d} x[\boldsymbol{k}] y[\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}]$$

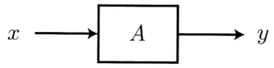


図 5.1　システム．

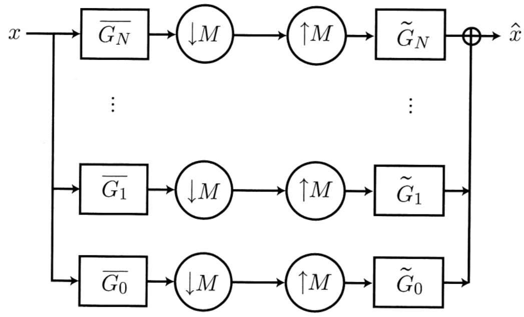


図 5.2　ウェーブレット・フレームフィルタバンク．

とする．以下では BIBO 安定なフィルタ*3) $a = (a[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{Z}^d}$ に対し，その周波数応答関数を

$$A(\omega) = \sum_{\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{Z}^d} a[\boldsymbol{n}]e^{-2\pi i(n_1\omega_1+\cdots+n_d\omega_d)},$$

$\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_d) \in \boldsymbol{R}^d$ により表す．また $\overline{A}(\omega) = \overline{A(\omega)}$ と表す．$\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^d$ に対して，図 5.1 の図式により，入力 $x \in l^2(\boldsymbol{Z}^d)$ に対してたたみ込み $y = a * x$ が出力されるシステムを表す．

ウェーブレット・フレームでは次のような分解フェーズと合成フェーズをもつフィルタバンクを考える：分解フェーズは近似部分を抽出する BIBO 安定フィルタ $g_0 = (g_0[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{Z}^d}$ と詳細部分を抽出する BIBO 安定フィルタ $g_p = (g_p[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{Z}^d}$ $(p = 1, \cdots, N)$ からなる．大雑把に言って g_0 は低域通過型，g_p は帯域通過型あるいは高域通過型のものが使われる．さらに合成フェーズとしては，図 5.2 のフィルタバンクにおいて**完全再構成性**，すなわち $x = \widehat{x}$ が成り立つように構成した BIBO 安定フィルタ $\widetilde{g}_p = (\widetilde{g}_p[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{Z}^d}$ $(p = 0, 1, \cdots, N)$ を用いる．

一般に図 5.2 のフィルタバンクが完全再構成になるための有用な条件を挙げておく．そのため次の記号を準備しておく．$d \times d$ 行列 S に対して

$$\mathcal{N}(S) = \{Sx^T : x \in [0, 1)^d\} \cap (\boldsymbol{Z}^d)^T$$

とする．ただし，$(\boldsymbol{Z}^d)^T = \{\boldsymbol{n}^T : \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^d\}$ とする．マルチレート信号処理の一般論で次のことが知られている：

定理 5.9.　図 5.2 において，任意の $\omega \in \boldsymbol{R}^d$ と任意の $\boldsymbol{r} \in \mathcal{N}(M^T)$, $\boldsymbol{r} \neq 0$ に対して

$$\sum_{p=0}^{N} \widetilde{G}_p(\omega)\overline{G_p(\omega)} = |\det M|, \tag{5.1}$$

$$\sum_{p=0}^{N} \widetilde{G}_p(\omega)\overline{G_p(\omega + \boldsymbol{r}^T M^{-1})} = 0 \tag{5.2}$$

が成り立つとき，$x = \widehat{x}$ が成り立つ．

注意．　$g_{p,\boldsymbol{m}}[\boldsymbol{n}] = g_p[\boldsymbol{n} - \boldsymbol{m}M^T]$, $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^d$ とおく．定理 5.9 を用いて $l^2(\boldsymbol{Z}^d)$ のフレームとなるような $\{g_{p,\boldsymbol{m}}\}_{\boldsymbol{m}\in \boldsymbol{Z}^d}$ を構成することができる．またこの節の議論は，たたみ込みの代わりに循環たたみ込み，安定フィルタの周期化などを考えれば，容易に $l^2(\boldsymbol{Z}_{N_1} \times \cdots \times \boldsymbol{Z}_{N_d})$ の場合に移行できる．ただし M として d 次元版の方形格子行列を考える．

5.4 最大重複一般化多重解像度解析

さて第 2 回で述べたように，視覚と錯視のシミュレーションでは最大重複法を使う．N_1, N_2 を偶数とし，$l^2(\boldsymbol{Z}_{N_1} \times \boldsymbol{Z}_{N_2})$ でのウェーブレット・フレームに対する最大重複法について記しておこう．以下での記述は新井・新井[1]を 2 次元信号処理用に直して一般化したものである*4)．M は 2×2 の方形格子行列とする．

J を正の整数とする．$x = (x[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n}\in \boldsymbol{Z}_{N_1}\times \boldsymbol{Z}_{N_2}}$ に対して，

$$x^o[\boldsymbol{m}] = x[\boldsymbol{m}] + x\left[m_1 + \frac{N_1}{2}, m_2 + \frac{N_2}{2}\right],$$

$\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}_{N_1/2} \times \boldsymbol{Z}_{N_2/2}$ とおく．そして $(\uparrow M)\, x^o_{per}$ を $\boldsymbol{Z}_{N_1} \times \boldsymbol{Z}_{N_2}$ に制限したものを $S(x)$ と定

*3)　有界な入力に対して出力も有界になるようなフィルタのことである．BIBO 安定なフィルタとその周波数応答関数については，例えば新井[3]を参照してほしい．

*4)　N_1, N_2 が偶数ではない場合については，新井[4]参照．

義する．明らかに S は $l^2(\boldsymbol{Z}_{N_1} \times \boldsymbol{Z}_{N_2})$ から $l^2(\boldsymbol{Z}_{N_1} \times \boldsymbol{Z}_{N_2})$ への線形作用素になっている．S^0 を恒等作用素とし，$S^\mu(x) = S(S^{\mu-1}(x))$, $\mu = 1, 2, \cdots$ と定める．BIBO 安定フィルタ $a = (a[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^2}$ に対して

$$p(a)[\boldsymbol{n}] = \sum_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^2} a[n_1 + m_1 N_1, n_2 + m_2 N_2],$$
$$T^j(a) = S^{j-1}(p(a)),$$

$(j = 1, 2, \cdots)$ とする．$z = (z[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}_{N_1} \times \boldsymbol{Z}_{N_2}}$ に対して，その反転を $z^\vee[\boldsymbol{n}] = z_{per}[-n_1, -n_2]$ により定める．また $x = (x[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}_{N_1} \times \boldsymbol{Z}_{N_2}}$ と $y = (y[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}_{N_1} \times \boldsymbol{Z}_{N_2}}$ に対してその循環たたみ込みを

$$x *_c y[\boldsymbol{n}] = \sum_{\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{Z}_{N_1} \times \boldsymbol{Z}_{N_2}} x_{per}[\boldsymbol{k}] y_{per}[\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}]$$

により定義する．$x = (x[\boldsymbol{n}])_{\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}_{N_1} \times \boldsymbol{Z}_{N_2}}$ に対して

$$G_p^1(x) = T^1(p(g_p))^\vee *_c x,$$
$$G_p^2(x) = T^2(p(g_p))^\vee *_c G_0^1(x),$$
$$\vdots$$
$$G_p^J(x) = T^J(p(g_p))^\vee *_c G_0^{J-1}(x),$$

$(p = 0, \cdots, N)$ と定める．これが最大重複法によるフィルタバンクの分解フェーズである．ここで得られたサブバンド信号 $G_p^j(x)$ に，ある処理を加えたものを $H_p^j(x)$ により表す．この処理全部の集まりを $\mathcal{H}$ で表すことにする．$\mathcal{H}$ は一般的な処理を表し，場合によっては入力 x に依存することもある．$\mathcal{H}$ として何も処理しない場合は $\mathcal{H} = \mathcal{I}$ と表す．

次に合成フェーズを作っておく：まず $F^j = T^j(\widetilde{g}_0)$ とし，

$$F_p^J(x) = 4^{-J} F^1 *_c \cdots *_c F^{J-1} *_c T^J(\widetilde{g}_p) *_c H_p^J(x)$$
$$F_p^{J-1}(x) = 4^{-J+1} F^1 *_c \cdots *_c F^{J-1} *_c T^{J-1}(\widetilde{g}_p) *_c H_p^{J-1}(x)$$
$$\vdots$$
$$F_p^1(x) = 4^{-1} T^1(\widetilde{g}_p) *_c H_p^1(x)$$

とする．

$$A_{\mathcal{H}}^J(x) = F_0^J(x) + \sum_{j=1}^{J} \sum_{p=1}^{N} F_p^j(x)$$

とする．これをレベル J の $\mathcal{H}$-最大重複一般化多重解像度分解 ($\mathcal{H}$-MOGMRA) と言うことにする．次のことが成り立つ（新井・新井[1)]）：定理 5.9 (5.1) が成り立てば，任意の $x \in l^2(\boldsymbol{Z}_{N_1} \times \boldsymbol{Z}_{N_2})$ に対して，$A_{\mathcal{I}}^J(x) = x$ である．

なおこれまでの回で述べたように，視覚，錯視の研究では，$\mathcal{H}$ として視覚情報処理を数理モデル化した非線形処理を考える．

5.5 かざぐるまウェーブレット・フレーム

前回詳しく述べたように，我々がこれまで使ってきた最大重複・双直交離散ウェーブレットは，Cohen–Daubechies–Feauveau の双直交ウェーブレットに，Nason–Silverman の最大重複法を組み合わせたものであった．しかしこれらはもともと視覚・錯視の研究のために作られたものではない．例えば，ウェーブレットは水平，垂直，対角の三方向と偶型フィルタを持つが，実際の単純細胞は多様な方位選択性ならびに偶型と奇型の両方を持っている．さらに前回説明した Young の実験結果によれば，数学的関数でフィットするには，さらに高階のガウス導関数もあったほうが望ましい．しかしこれらの要請をすべてみたすようなフィルタバンクはウェーブレットの範疇内で作ることは困難である．そこで我々は離散ウェーブレット基底の枠組みを広げたウェーブレット・フレームあるいはフレームレットの枠組みを用いて，視覚の数理モデルに適したフィルタバンクを構成した．2007 年に我々はそのようなウェーブレット・フレームを新井・新井[1)]で構成した．これは Ron–Shen の 1 次元フレームからテンソル積と独自の方位分離フィルタを使って構成したものである．方位分離

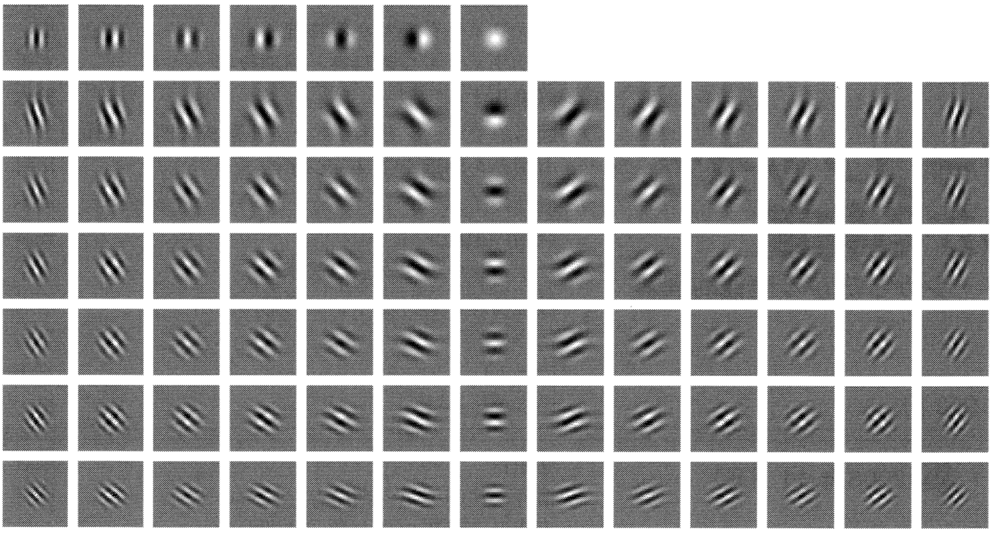


図 5.3　新井・新井[1]による 6 次のかざぐるまウェーブレット・フレーム．レベル 2 の MOGMRA による，シフトされた単位インパルス応答画像の中央部分を並べたもの．

フィルタは前節の $\mathcal{H}$ の部分にあたる．ただし分離フィルタは完全再構成性，すなわち $A^J_{\mathcal{H}}(x)=x$ となるように構成される．これを n **次のかざぐるまウェーブレット・フレーム**（**pinwheel wavelet frame of degree** n）と呼ぶことにする（図 5.3 参照）．ここで n はパラメータで，n が大きければそれだけ選択できる方位が増える．この他，方位分離フィルタにもパラメータがあり，それにより方位分離機能を調節することができる．分離機能を上げるとフィルタ長が長くなる．詳細は前掲[1]を参照してほしい．

最後に「かざぐるま」と名を付けた理由を述べておきたい．これは脳の神経科学に由来する．V1 野では神経細胞がカラム構造をもっており，近い方位選択性をもつ神経細胞が近接して並び，かざぐるま状になっている．そしていくつものかざぐるまが分散しているのである．さらに様々な向きの棒状の視覚刺激を回転させるように与えると，動物実験によればそれに応じてかざぐるまが回っているかのような反応をみせる．我々のウェーブレット・フレームをかざぐるま状に並べ，様々な方向の棒状の信号を入力すると，やはりかざぐるま状の反応を示す．これが「かざぐるま」の由来である．このかざぐるまの構造を再現することは，視覚情報処理の数理モデルにとって，方位選択性の再現という点から重要なことである．

ところでかざぐるまウェーブレット・フレームでは実際の脳の縦と横の刺激に対する反応よりシャープになった．この縦と横の特異性をなくした全く新しいフレームレット，（単純）かざぐるまフレームレットを最近筆者らは構成した（新井・新井[2]）．

これらのかざぐるまウェーブレット・フレーム，フレームレットは視覚・錯視の研究だけでなく画像工学への応用可能性もあると考えている．

数学の話題はこれで切り上げ，次回は再び視覚と錯視の話に戻る．なお本稿に記したウェーブレット・フレーム，フレームレットの数学に関するさらに詳しいことや証明は，例えば拙著[4]にある．

参考文献

1) H. Arai and S. Arai, *Interdisciplinary Information Sci.* **13** (2007), 255–273.
2) H. Arai and S. Arai, preprint (2008).
3) 新井仁之，『フーリエ解析学』，朝倉書店，2003.
4) 新井仁之，『ウェーブレット』，共立出版，準備中.
5) I. Daubechies, B. Han, A. Ron and Z. Shen, *Appl. Comput. Harm. Anal.* **14** (2003), 1–46.
6) R.J. Duffin and A.C. Schaeffer, *Trans. Amer. Math. Soc.* **72** (1952), 341–365.

（あらい・ひとし，
東京大学大学院数理科学研究科/科学技術振興機構さきがけ）

特　集（2009年1月号予告）

グラフィックでわかる物理
イメージから広がる直観的理解

グラフィックでわかる物理	原　康夫
グラフィカルな教科書と物理教育	右近　修治
可視化する物理	鈴木　久男
図形的イメージを伴うベクトル解析入門	兵頭俊夫・和田健
力線から物理をイメージする	川村　清
流れのイメージ	高木　隆司
空間の把握	佐藤　光
ファインマン・ダイアグラム	青木　健一
数理物理におけるヤング図形の効用	白石　潤一
[コラム]	下村　裕
[コラム]	宮下　精二
[インタビュー]	原　康夫

本体952円

特　集（2008年11月号）

物理と論理
概念規定と論理構造をとらえ直す

巻頭言	細谷　暁夫
慣性の法則と慣性系の存在について	岡村　浩
平衡と非平衡の熱力学・統計力学 ミクロとマクロを結ぶ論理	田崎　晴明
Maxwellのデーモンと情報熱力学	沙川貴大・上田正仁
量子力学の論理	小澤　正直
量子力学「粒子と波動」	平野　琢也
特異点定理とブラックホール特異点	前田　健吾
情報科学と論理	萩谷　昌己
数学と論理　素数をめぐって	黒川　信重
[コラム]　ゲーデルの不完全性定理 それは何であるか，何でないか	八杉満利子
[インタビュー]　物理における思考と個人主義	細谷　暁夫
《名著に親しむ》　サイエンスの香り	細谷　暁夫
《連載》　目で見て学ぶ量子力学　その6	外村　彰
視覚の科学と数学　その4	新井　仁之
《物理の道しるべ》　第5回	永長　直人

本体952円

編集後記

そもそも今回の企画のきっかけは，特集記事にあるSLEの話題からでしたが，残念なことに，立役者のシュラム氏が不慮の事故で急逝されたことを校正中に知りました．本特集が，その志に錦上花を添えることができればと思います．（N）

＊　　＊

確率論からこれだけ物理の話題が議論できるとは大変な驚きです．

小誌は一足先に年末を迎えますが，来年も私達を驚かせるような科学のニュースが入ってくることを期待します．（R）

数　理　科　学　12月号

2008年12月1日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁